РЯДЫ ФУРЬЕ

Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

П. И. РОМАНОВСКИЙ

РЯДЫ ФУРЬЕ
ТЕОРИЯ ПОЛЯ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

П. И. РОМАНОВСКИЙ

РЯДЫ ФУРЬЕ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

11-5-2

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений по некоторым разделам высшей математики, выходящим за пределы основного курса.

Книга написана очень сжато, в конспективной форме. Она представляет интерес не только для студентов старших курсов, но также для аспирантов, инженеров и преподавателей.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА IV

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное развитие техники предъявляет повышенные требования к математической подготовке инженера. Традиционный втузовский курс математики оказывается явно недостаточным при подготовке инженеров ряда специальностей. На некоторых факультетах многих высших технических учебных заведений в обязательную программу ныне включаются специальные (дополнительные) главы курса математики. Однако подходящей для студентов втузов учебной литературы по этим вопросам еще не хватает. Использование же только одних больших курсов и монографий затруднительно для студентов.

Практика показывает, что имеется большая потребность в небольших по объему, сжато написанных учебных пособиях, где в доступной для студентов форме и в определенной логической последовательности излагалось бы основное содержание дополнительных глав курса математики, ныне преподаваемых во втузах.

Настоящая книга имеет целью в сжатой, конспективной форме изложить некоторые из этих глав. Она возникла из книги «Дополнительные главы курса математики для радиотехнических факультетов» (Оборонгиз, 1954), явившейся конспектом лекций, читанных автором на радиотехническом факультете Московского авиационного института.

Предлагаемую книгу следует рассматривать как краткое учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений по следующим разделам:

ряды Фурье и интеграл Фурье;

теория поля;

теория аналитических функций;

некоторые специальные функции;

операционное исчисление.

В книге не приводятся физические и технические приложения излагаемых теорий. Такие приложения можно найти в более подробных руководствах, например: в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата «Методы теории функций комплексного переменного» (по аналитическим функциям, специальным функциям и операционному исчислению), в книге Г. П. Толстова «Ряды Фурье» (по рядам и интегралу Фурье).

В отдельных (немногих) местах книги, в целях большей стройности, изложены некоторые не обязательные для студентов факты, тесно примыкающие к излагаемым теориям.

Автор

ГЛАВА I
РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на всей числовой прямой. Число T называется *периодом* этой функции, если от прибавления его к аргументу величина функции не меняется, т. е. если для всех x имеем

$$f(x+T)=f(x).$$

Если T есть период функции, то nT, где n — любое целое число, есть тоже период рассматриваемой функции. Таким образом, всякое кратное периода есть период. Функция, имеющая период, отличный от нуля, называется *периодической*.

Легко видеть, что всякая периодическая функция, отличная от постоянной, имеющая хотя бы одну точку непрерывности, имеет среди своих положительных периодов наименьший. Тогда все прочие периоды будут кратны ему. Обычно, говоря о периоде функции, понимают под словом «период», наименьший из положительных периодов.

Если функция $f(x)$ имеет период T, то $\varphi(x)=f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$. В самом деле,

$$\varphi\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)=f(ax)=\varphi(x).$$

Если $f(x)$ имеет период T, то интеграл этой функции, взятый в пределах, отличающихся на T, не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, т. е.

$$\int_{c}^{c+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

при всяком c. Действительно, пусть, например, $0 < c < T$. Тогда

$$\int_c^{c+T} = \int_c^T + \int_T^{c+T} = \int_c^T + \int_0^c = \int_0^T,$$

учитывая, что вследствие периодичности, $\int_T^{c+T} = \int_0^c$.

§ 2. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π

Поставим задачу: разложить сложную периодическую функцию на простые периодические функции. Под «простыми периодическими функциями» естественно понимать *простые гармоники*, т. е. функции вида

$$A \sin(\omega x + \alpha)$$

или, что равносильно, функции вида

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Эта простая гармоника имеет период $\frac{2\pi}{\omega}$.

Если мы хотим разложить функцию с периодом 2π на простые гармоники, то их частоты следует выбирать так, чтобы каждая из этих гармоник имела 2π в качестве одного из своих периодов. Таким образом, частоты ω следует брать так, чтобы $n\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ (n — целое) или $\omega = n$, т. е. в качестве составляющих следует брать гармоники с целыми частотами.

Допуская в качестве составляющей еще постоянную, для которой всякое число служит периодом, приходим к такой задаче: разложить функцию $f(x)$ с периодом 2π в ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

или, короче, в ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... — некоторые постоянные (свободный член удобно записывать в виде $\frac{a_0}{2}$ по причине, которая выяснится ниже).

Вычисление вспомогательных интегралов

Нам потребуются интегралы

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx,\end{aligned}\right\}\quad n\text{ — целое;}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx,\end{aligned}\right\}\quad m,\ n\text{ — целые положительные.}$$

Имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\begin{cases}\left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0 & (n\neq 0),\\ x\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi & (n=0);\end{cases}\tag{1.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\begin{cases}-\left.\dfrac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0 & (n\neq 0),\\ 0\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=0 & (n=0);\end{cases}\tag{1.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n);\end{cases}\tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx - \\ - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n); \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x\, dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x\, dx = 0, \tag{1.5}$$

причем при выводе формул (1.3) и (1.4) использовалась формула (1.1), при выводе (1.5) использовалась (1.2).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ оказалась такой, что для нее нашлось разложение в *равномерно сходящийся ряд* указанного выше вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \\ \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots \tag{1.6}$$

Почленное интегрирование в пределах от $-\pi$ до π (законное в силу предположенной равномерной сходимости) с учетом (1.1) и (1.2) дает:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx\right) + \\ + \left(a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\, dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx\right) + \ldots \\ \ldots + \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right) + \ldots = \pi a_0.$$

Умножая (1.6) на $\cos nx$ и интегрируя почленно от $-\pi$ до π, с учетом (1.1), (1.3) и (1.5) получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx +$$
$$+\left(a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\right)+$$
$$+\left(a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\,dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos nx\,dx\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\,dx\right)+\ldots=\pi a_n.$$

Аналогично, умножая (1.6) на $\sin nx$ и интегрируя почленно от $-\pi$ до π и учитывая (1.2), (1.4), (1.5), получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \pi b_n.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Определение. Пусть $f(x)$ — функция с периодом 2π, имеющая на сегменте $[-\pi, \pi]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируемая на этом сегменте (тогда она будет абсолютно интегрируема на всяком сегменте). *Рядом Фурье* этой функции называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

коэффициенты которого определяются по формулам (1.7). При этом пишут:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1.8}$$

Примечание. Вместо функций с периодом 2π можно рассматривать функции, определенные лишь на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие отмеченным требованиям. Определение ряда Фурье для такой функции будет то же самое.

Необходимо отметить, что из определения ряда Фурье отнюдь не следует, что функция должна разлагаться в свой ряд Фурье. Из сказанного выше следует только, что *если* некоторая функция допускает разложение в равномерно сходящийся ряд вида (1.8), то этот ряд будет ее рядом Фурье.

Доказательство разложимости функции в свой ряд Фурье в точках дифференцируемости

Имеем для любого x_0:

$$a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\cdot\cos nx_0+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\cdot\sin nx_0=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx\cos nx_0+\sin nx\sin nx_0)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n(x-x_0)\,dx;$$

$$S_N(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(x-x_0)\right]dx.$$

Заметим далее, что $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha$ является действительной частью выражения

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}e^{in\alpha}=-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{N}e^{in\alpha}=-\frac{1}{2}+\frac{1-e^{i(N+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}=$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{(1-e^{i(N+1)\alpha})(1-e^{-i\alpha})}{|1-e^{i\alpha}|^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1-e^{-i\alpha}+e^{iN\alpha}-e^{i(N+1)\alpha}}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha},$$

поэтому

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{1-\cos\alpha+\cos N\alpha-\cos(N+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{\cos N\alpha-\cos(N+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Следовательно, при любом x_0 имеем:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(x-x_0)}dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx \qquad (1.8')$$

(второй интеграл получен из первого заменой x на x_0+x с учетом периодичности f). Применяя эту формулу к случаю $f(x)\equiv 1$, получим:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx. \tag{1.8''}$$

Умножая (1.8″) на $f(x_0)$ и вычитая из (1.8′), найдем при любом x_0:

$$S_N(x_0)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0+x)-f(x_0)]\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx. \tag{1.8'''}$$

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма Римана. Если $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек и абсолютно интегрируема на этом сегменте, то $\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x\,dx\to 0$ при $\nu\to+\infty$.

Доказательство. Так как

$$\left|\int_a^b \sin\nu x\,dx\right|=\left|\frac{\cos\nu a-\cos\nu b}{\nu}\right|\leqslant\frac{2}{\nu}\to 0,$$

$$\left|\int_a^b x\sin\nu x\,dx\right|=\left|\frac{a\cos\nu a-b\cos\nu b}{\nu}+\frac{\sin\nu b-\sin\nu a}{\nu^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|a|+|b|}{\nu}+\frac{2}{\nu^2}\to 0$$

при $\nu\to+\infty$, то лемма Римана верна для $f(x)\equiv 1$ и $f(x)\equiv x$ и поэтому верна для любой линейной функции $f(x)\equiv Ax+B$. Отсюда следует, что лемма верна для любой кусочно-линейной функции (т. е. функции, график которой есть ломаная линия), ибо если $f(x)$ кусочно-линейна на $[a, b]$, то найдутся такие числа c_k: $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$, что $f(x)$ линейна на каждом $[c_{k-1}, c_k]$; а тогда

$$\int_a^b f(x) \sin \nu x \, dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_{n-1}}^b \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to +\infty,$$

ибо по доказанному каждое слагаемое правой части стремится к нулю. Далее заметим, что любая непрерывная функция на $[a, b]$ может быть как угодно хорошо аппроксимирована кусочно-линейной функцией. Действительно, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при любых x' и x'' на $[a, b]$ из $|x'' - x'| < \eta$ следует $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Возьмем числа $c_0 = a < c_1 < \ldots \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ так, что все $c_k - c_{k-1} < \eta$, и пусть $\varphi(x)$ обозначает функцию, график которой есть вписанная в график функции $f(x)$ ломаная, вершины которой имеют абсциссы c_k; тогда для любого x на $[a, b]$ будет $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$, так как если число x попадает на частичный сегмент $[c_{k-1}, c_k]$, то $\varphi(x)$ лежит между $\varphi(c_{k-1})$ и $\varphi(c_k)$ (ибо φ линейна и, следовательно, монотонна на $[c_{k-1}, c_k]$), поэтому число $\varphi(x) - f(x)$ лежит между $\varphi(c_{k-1}) - f(x) = f(c_{k-1}) - f(x)$ и $\varphi(c_k) - f(x) = f(c_k) - f(x)$, модули которых $< \varepsilon$, и поэтому тоже будет иметь модуль $< \varepsilon$.

Теперь легко показать, что лемма Римана справедлива для любой непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$. В самом деле, по доказанному для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая кусочно-линейная функция $\varphi(x)$, что $|\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ на $[a, b]$. Так как для кусочно-линейной функции лемма Римана справедлива, то при достаточно большом ν будем иметь:

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

но тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\sin\nu x\,dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \nu\to+\infty.$$

Пусть теперь $f(x)$ имеет одну точку разрыва c, $a<c<b$. Так как $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как лемма Римана для непрерывной функции справедлива, то при достаточно большом ν будем иметь:

$$\left|\int_a^{c-\delta} f(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \left|\int_{c+\delta}^{b} f(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

но тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta} f(x)\sin\nu x\,dx\right| + \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|\,dx + \left|\int_{c+\delta}^{b} f(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon;$$

следовательно, $\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx \to 0$ при $\nu\to+\infty$. Аналогичное рассуждение проводится в случае, когда $f(x)$ имеет несколько точек разрыва на $[a, b]$. Лемма Римана доказана.

Предположим теперь, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)=0$. Тогда из (1.8''') находим:

$$S_N(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+x)}{2\sin\frac{1}{2}x}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\,dx,$$

а так как

$$\frac{f(x_0+x)}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{f(x_0+x)}{x}\,\frac{x}{2\sin\frac{1}{2}x}\to f'(x_0)\cdot 1=f'(x_0)$$

при $x\to 0$, то после надлежащего доопределения в точке $x=0$ функция $\varphi(x)=\dfrac{f(x_0+x)}{2\sin\frac{1}{2}x}$ становится непрерывной в этой точке и, очевидно, находится в условиях применимости леммы Римана на $[-\pi,\pi]$. Поэтому

$$S_N(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad N\to+\infty.$$

Пусть теперь $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, имея в ней какое угодно значение. Положим $\tilde{f}(x)=f(x)-f(x_0)$. Тогда частичные суммы ряда Фурье этой функции будут

$$\tilde{S}_N(x)=S_N(x)-f(x_0).$$

Так как $\tilde{f}(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $\tilde{f}(x_0)=0$, то по доказанному

$$\tilde{S}_N(x_0)\to 0 \quad \text{при} \quad N\to+\infty,$$

т. е.

$$S_N(x_0)-f(x_0)\to 0 \quad \text{при} \quad N\to+\infty,$$

и, следовательно,

$$f(x_0)=\lim_{N\to+\infty}S_N(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0).$$

Итак, доказана

Теорема. Если функция $f(x)$ с периодом 2π имеет на сегменте $[-\pi,\pi]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на этом сегменте, то эта функция разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке, в которой она дифференцируема.

Примечание. Доказанное достаточное условие представимости функции своим рядом Фурье отнюдь не является необходимым. Представление функции своим рядом Фурье будет иметь место и при значительно более общих предположениях. Отметим, например, без доказательства, что если $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на $[-\pi, \pi]$ *), то $f(x)$ разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке непрерывности, а в точках разрыва x ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Отсюда следует, что разложение рассматриваемой функции в ряд Фурье имеет место во всех правильных точках, т. е. в точках x, где

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

§ 3. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям определения § 2, и пусть ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

является ее рядом Фурье. Преобразуем общий член этого ряда с помощью формул Эйлера (выражающих косинус и синус через показательную функцию). Имеем:

$$\begin{aligned}a_n\cos nx+b_n\sin nx&=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=\\&=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=\\&=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}=c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx},\end{aligned}$$

где

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2};\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}.$$

*) Говорят, что функция удовлетворяет условию Дирихле на некотором сегменте, если этот сегмент можно разбить на конечное число частей так, что внутри каждой части функция монотонна и ограничена.

Полагая еще $c_0 = \frac{a_0}{2}$, получим для частичных сумм ряда Фурье выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{inx} + c_{-n}{}^{-inx}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Для новых коэффициентов c_n получаем формулы (учитывая формулы для a_n и b_n)

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \quad (n > 0).$$

Непосредственно видно, что эта формула верна для $n = 0$ и для $n < 0$ (последнее видно, например, из того, что $c_{-n} = \bar{c}_n$, где $\bar{c}$ обозначает число, сопряженное c).

По доказанному имеем в точках дифференцируемости:

$$f(x) = \lim_{N \to \infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$\left(\text{понимая } \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \text{ как } \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{-N}^{N}\right)$.

Итак, в точках дифференцируемости

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{1.9}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Правая часть формулы (1.9) представляет собой *комплексную форму ряда Фурье* для функции с периодом 2π.

§ 4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на всей числовой прямой (или на каком-нибудь интервале с симметричными концами).

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для всех рассматриваемых значений x имеем $f(-x)=f(x)$. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если имеем $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Линейная комбинация четных функций есть четная функция, линейная комбинация нечетных функций есть нечетная функция (мы называем линейной комбинацией нескольких функций всякую сумму произведений этих функций на какие-нибудь постоянные).

Произведение нескольких функций, каждая из которых является четной или нечетной, будет четной или нечетной функцией в зависимости от четности или нечетности числа нечетных множителей. В частности, произведение двух четных или двух нечетных функций есть четная функция, произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-c, c]$, то

$$\int_{-c}^{c} f(x)\, dx = \int_{-c}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{c} f(x)\, dx.$$

Но (при замене x на $-x$)

$$\int_{-c}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{c} f(-x)\,dx,$$

следовательно,

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{0}^{c} [f(x)+f(-x)]\,dx,$$

откуда

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная.} \end{cases} \tag{1.10}$$

Четные и нечетные функции являются узкими частными случаями функций, но тем не менее всякая функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций. В самом деле, имеем:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \varphi(x) + \psi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}; \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

и, очевидно, $\varphi(x)$ — четная функция, $\psi(x)$ — нечетная функция. Если $f(x)$ имеет период, то $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют такой же период.

Если функция $f(x)$ оказалась одновременно четной и нечетной, то $f(-x) = \pm f(x)$, откуда $f(x) = -f(x)$ и, следовательно, $f(x)$ тождественно равна нулю. Тождественный нуль есть единственная функция, которая является одновременно четной и нечетной.

Отсюда легко заключить, что любая функция не может быть двумя разными способами представлена в виде суммы четной и нечетной функций. Действительно, если

$$f(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x) = \varphi_2(x) + \psi_2(x)$$

(где φ_1, φ_2—четные, ψ_1, ψ_2—нечетные), то $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\psi_2(x)-\psi_1(x)$; но левая часть этого равенства есть четная функция, правая же часть — нечетная, откуда

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\psi_2(x)-\psi_1(x)=0,$$

следовательно,

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x); \quad \psi_1(x)=\psi_2(x).$$

Отсюда и из ранее сказанного видно, что всякая функция единственным способом может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

§ 5. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π

Пусть $f(x)$ — четная функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям определения § 2.

Для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом, в ряде Фурье для четной функции отсутствуют члены с синусами, и *ряд Фурье для четной функции с периодом* 2π выглядит так:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx, \tag{1.11}$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Пусть теперь $f(x)$ — нечетная функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям определения § 2. Для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом, в ряде Фурье для нечетной функции отсутствует свободный член и члены с косинусами, и *ряд Фурье для нечетной функции с периодом* 2π выглядит так:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx, \tag{1.12}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & \text{на } (-\pi,\ 0), \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{на } (0,\ \pi), \end{cases}$$

имеющую период 2π (в точках $n\pi$, где n — целое, полагаем $f(x) = 0$).

Очевидно, $f(x)$ — нечетная функция (рис. 1), поэтому в силу (1.12) имеем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{2n}\right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos 0 - \cos n\pi}{2n} = \frac{1-(-1)^n}{2n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном;} \end{cases}$$

значит, $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = 0, \ldots$ и искомое разложение есть

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Отсюда при $x = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$, имеющую период 2π.

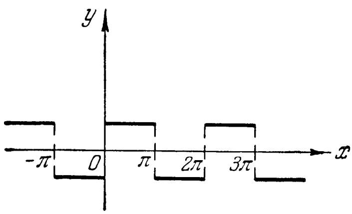


Рис. 1.

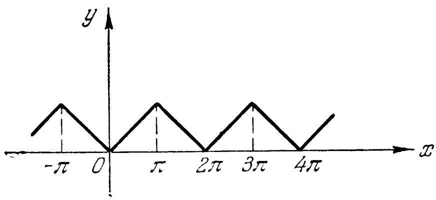


Рис. 2.

Очевидно, $f(x)$ — четная функция (рис. 2), поэтому в силу (1.11) имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos n\pi - \cos 0}{n^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{9\pi}, \quad a_4 = 0, \ldots$$

и искомое разложение есть

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots\right).$$

Отсюда, между прочим, при $x = 0$ получим:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right),$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Зная сумму этого ряда, легко найти

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Имеем:

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S,$$

следовательно, $S = \frac{\pi^2}{6}$, т. е.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

§ 6. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ЛЮБЫМ ПЕРИОДОМ

Пусть $f(x)$ — функция с произвольным периодом $2l$ (где l есть полупериод). Полагая $x = at$, получим функцию $f(at)$ с периодом $\frac{2l}{a}$. Выберем a так, чтобы $\frac{2l}{a} = 2\pi$, т. е. $a = \frac{l}{\pi}$. Тогда подстановка $x = \frac{lt}{\pi}$ приводит нас к функции $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ с периодом 2π.

Предположим, что $f(x)$ имеет на сегменте $[-l, l]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на этом сегменте. В силу § 2 имеем в точках дифференцируемости:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos nt \, dt$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Возвращаясь как в ряде, так и в формулах для коэффициентов, от нового переменного t к старому переменному x и замечая, что $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$, получаем в точках дифференцируемости:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \, dx; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots); \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Ряд (1.13) с коэффициентами, определяемыми формулами (1.14), называется рядом Фурье для функции $f(x)$ с периодом $2l$.

Ряды Фурье для четных и нечетных функций с любым периодом

В случае четной функции с периодом $2l$ все $b_n = 0$ и, следовательно, в ряде Фурье нет членов с синусами. Тогда получим (как в § 5) в точках дифференцируемости:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.15}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В случае нечетной функции с периодом $2l$ все $a_n = 0$ и, следовательно, в ряде Фурье нет свободного члена и членов с косинусами. Тогда получим (как в § 5) в точках дифференцируемости:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.16}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пример 1. Написать разложение в ряд Фурье нечетной функции с периодом 1. Здесь $2l = 1$, и на основании (1.16) получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin 2n\pi x, \quad \text{где} \quad b_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье $|\sin x|$. Очевидно, $|\sin x|$ есть четная функция с периодом π. Здесь $2l = \pi$, и на основании (1.15) получаем:

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos 2nx,$$

где

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Следовательно,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \dots\right).$$

Отсюда при $x = 0$ получаем:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1},$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\dots$$

Комплексная форма ряда Фурье для функции с любым периодом

Пусть $f(x)$ — функция с периодом $2l$, удовлетворяющая условиям, указанным в начале параграфа. Тогда подстановка $x = \frac{lt}{\pi}$ приводит нас к функции $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ с периодом 2π.

В силу § 3 имеем в точках дифференцируемости:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}; \qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) e^{-int}\,dt.$$

Переходя как в ряде, так и в формулах для коэффициентов к старому переменному x и замечая, что $t=\frac{\pi x}{l}$, $dt=\frac{\pi}{l}dx$, получим в точках дифференцируемости:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \tag{1.17}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-\frac{in\pi x}{l}}\,dx \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{1.18}$$

Правая часть формулы (1.17), где коэффициенты определяются равенствами (1.18), называется комплексной формой ряда Фурье для функции с периодом $2l$.

Разложение в ряд Фурье функции, заданной на сегменте $[-l, l]$

Если на полуоткрытом интервале длины $2l$, т. е. на интервале вида $[a, a+2l)$ или $(a, a+2l]$, определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на упомянутом полуоткрытом интервале и присоединим к нему все его горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$ (т. е. на расстояния $2nl$, где n — произвольное целое число). Тогда получится график функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на том интервале, где она была определена.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении периодических функций в ряды Фурье следует, что если $f(x)$ имеет на $[-l, l]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на этом сегменте, то внутри этого сегмента в точках дифференцируемости имеем:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots); \\ &b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Разложение в ряд косинусов функции, заданной на сегменте $[0, l]$

Если на сегменте $[0, l]$ определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно оси ординат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$. Тогда получится график четной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0, l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных периодических функций в ряды Фурье следует, что если $f(x)$ имеет на $[0, l]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на этом сегменте, то внутри этого сегмента в точках дифференцируемости имеем разложение в ряд косинусов:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.21}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (1.22)$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Разложение в ряд синусов функции, заданной на сегменте $[0, l]$

Если на интервале $(0, l)$ определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится нечетная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на упомянутом интервале, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно начала координат, затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$, и, кроме того, добавим все точки с координатами nl, 0 (где n — любое целое число). Тогда получится график нечетной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на интервале $(0, l)$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении нечетных периодических функций в ряды Фурье следует, что если $f(x)$ имеет на $[0, l]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на этом сегменте, то внутри этого сегмента в точках дифференцируемости имеем разложение в ряд синусов:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad (1.23)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \quad (1.24)$$

На концах сегмента ряд (1.23) будет сходиться к нулю. Следовательно, если дополнительно потребовать, чтобы $f(x)$ обращалась в нуль на концах сегмента $[0, l]$, то разложение (1.23) будет иметь место еще на концах сегмента $[0, l]$.

§ 7. УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И ЕГО РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Рассмотрим натянутую струну, расположенную вдоль оси абсцисс. Если струна совершает малые поперечные колебания (т. е. каждая точка струны может смещаться только в вертикальном направлении и, следовательно, сохраняет величину своей абсциссы) без воздействия внешних сил, то можно показать (отбрасывая малые величины высших порядков), что если $u(x, t)$ обозначает ординату точки струны с абсциссой x в момент t, то функция $u(x, t)$ будет удовлетворять линейному однородному уравнению с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.25}$$

где a — постоянное положительное число.

Если струна имеет конечную длину l и ее концы с абсциссами 0 и l закреплены, то мы получаем следующие граничные условия:

$$u(0, t) = 0; \qquad u(l, t) = 0. \tag{1.26}$$

Будем сперва искать те решения уравнения (1.25) в области

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad -\infty < t < +\infty,$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.26), которые имеют специальный вид: $X(x)T(t)$, где X — дважды непрерывно дифференцируемая функция от x на $[0, l]$, не равная тождественно нулю, T — дважды непрерывно дифференцируемая функция от t, не равная тождественно нулю.

Вставляя $u = XT$ в (1.25), получим:

$$XT'' = a^2 X'' T, \tag{1.27}$$

откуда после разделения переменных найдем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \tag{1.28}$$

Так как левая часть не зависит от t, а правая часть не зависит от x, то общая величина этих отношений есть некоторая постоянная λ; поэтому

$$X'' - \lambda X = 0; \qquad T'' - \lambda a^2 T = 0. \tag{1.29}$$

Строго говоря, формула (1.28) и, следовательно, формула (1.29) справедливы для тех x, где $X(x) \neq 0$, и тех t, где $T(t) \neq 0$. Но там, где $X(x) = 0$, имеем в силу (1.27) $X''(x) = 0$ (ибо T не исчезает тождественно), и там, где $T(t) = 0$, имеем в силу (1.27) $T''(t) = 0$ (ибо X не исчезает тождественно); поэтому равенства (1.29) справедливы для всех рассматриваемых x и t.

Граничные условия (1.26) дают:

$$X(0)\,T(t) = 0; \qquad X(l)\,T(t) = 0$$

и, следовательно (так как T не исчезает тождественно),

$$X(0) = 0; \qquad X(l) = 0. \tag{1.30}$$

Покажем теперь, что при $\lambda \geqslant 0$ первое из уравнений (1.29) не может иметь на $[0, l]$ решений, не исчезающих тождественно и удовлетворяющих граничным условиям (1.30).

В самом деле, если бы при $\lambda > 0$ нашлось такое решение, то в некоторой точке между 0 и l оно было бы отлично от нуля, например положительно (в противном случае следовало бы заменить X на $-X$); тогда наибольшее значение X на $[0, l]$ должно было бы быть положительно и достигаться в некоторой точке ξ внутри этого сегмента. Но тогда

$$X(\xi) > 0; \quad X'(\xi) = 0; \quad X''(\xi) = \lambda X(\xi) > 0$$

и, следовательно, в точке ξ функция X должна иметь минимум, что нелепо. В случае $\lambda = 0$ первое из уравнений (1.29) превращается в $X'' = 0$, следовательно, X линейна и при условиях (1.30) может быть только тождественным нулем. Итак, мы доказали, что $\lambda < 0$, поэтому можно положить $\lambda = -k^2$, где $k > 0$.

Уравнения (1.29) принимают вид

$$X'' + k^2 X = 0; \qquad T'' + k^2 a^2 T = 0. \tag{1.29$'$}$$

Составляя и решая соответствующие характеристические уравнения этих однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, найдем:

$$X = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx; \qquad T = D_1 \cos akt + D_2 \sin akt,$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — постоянные.

Граничные условия (1.30) налагают требования:

$$C_1 = 0; \qquad C_1 \cos kl + C_2 \sin kl = 0,$$

откуда (так как $C_2 \neq 0$, если $C_1 = 0$) $\sin kl = 0$; $kl = n\pi$ (n — целое); $k = \frac{n\pi}{l}$; следовательно,

$$X = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}; \qquad T = D_1 \cos \frac{an\pi t}{l} + D_2 \sin \frac{an\pi t}{l},$$

откуда (полагая $C_2 D_1 = A$, $C_2 D_2 = B$)

$$u = XT = \left(A \cos \frac{n\pi at}{l} + B \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (1.30')$$

Обратно, непосредственно проверяется, что выражение (1.30′) при любых постоянных A и B удовлетворяет уравнению (1.25) и граничным условиям (1.26). Таким образом, общий вид всех решений уравнения (1.25), удовлетворяющих граничным условиям (1.26) и имеющих специальный вид $u = X(x)\,T(t)$, дается формулой (1.30′).

Так как уравнение (1.25) и граничные условия (1.26) линейны и однородны, всякая линейная комбинация решений уравнения (1.25) с условиями (1.26) есть также решение уравнения (1.25) с условиями (1.26). В упомянутой линейной комбинации может участвовать не только конечное, но и бесконечное число функций, однако в последнем случае постоянные коэффициенты следует брать так, чтобы получающийся ряд и ряды, появляющиеся из него после однократных и двукратных почленных дифференцирований по рассматриваемым переменным, были бы равномерно сходящимися [тогда законны однократные и двукратные почленные дифференцирования, с которыми придется встретиться при проверке выполнимости (1.25)]. Таким образом, выражения вида

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (1.31)$$

(при надлежащем осторожном выборе коэффициентов A_n, B_n) будут решениями уравнения (1.25) с условиями (1.26).

Предположим теперь, что для каждой точки струны известно ее начальное положение и начальная скорость. Тогда на $u(x, t)$ должны быть наложены дополнительные ограничения вида

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t'(x, 0) = \psi(x), \tag{1.32}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции [причем $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$].

Условия (1.32) называются *начальными условиями*. Будем искать среди решений вида (1.31) такие, которые удовлетворяют начальным условиям (1.32), т. е. подчиним функции

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$u_t'(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n\pi a}{l} A_n \sin\frac{n\pi at}{l} + \frac{n\pi a}{l} B_n \cos\frac{n\pi at}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

условиям (1.32). Тогда получим (полагая $t = 0$):

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

и, следовательно [см. формулы (1.24) для коэффициентов разложения функции на сегменте $[0, l]$ в ряд синусов],

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx;$$

$$\frac{n\pi a}{l} B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Итак, решение рассматриваемой задачи о свободных малых колебаниях струны с закрепленными концами и заданными начальными положениями и начальными скоростями ее точек дается формулой

$$\left.\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\\
&\text{где}\\
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);\\
B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \ (n = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

Разумеется, предыдущие выкладки законны лишь при достаточно осторожном задании функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, но на этом вопросе мы не будем останавливаться.

§ 8. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Отметим сперва некоторые вспомогательные факты.

Вычисление интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

Преобразуя двойной интеграл от $e^{-xy}\sin x$ по квадрату ($0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant a$) двумя способами в двукратные интегралы и сравнивая результаты, получим:

$$\int_0^a \sin x\,dx \int_0^a e^{-xy}\,dy = \int_0^a dy \int_0^a e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Элементарное интегрирование дает:

$$\int_0^a e^{-xy}\,dy = \frac{1-e^{-ax}}{x};$$

$$\int_0^a e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1-e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1+y^2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}\,dx =$$

$$= \int_0^a \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^a \frac{e^{-ay}(\cos a + y\sin a)}{1+y^2}\,dy.$$

Так как *) модуль второго слагаемого левой части меньше $\frac{1}{a}$, модуль второго слагаемого правой части меньше $\frac{2}{a}$, то в пределе при $a \to +\infty$ получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (1.34)$$

Поскольку $\frac{\sin x}{x}$ — четная функция, из последней формулы следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi. \qquad (1.34')$$

Лемма Римана для бесконечного промежутка

Если $f(x)$ имеет на каждом конечном интервале не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx \to 0 \qquad \text{при } a \to +\infty.$$

Доказательство. Возьмем c и d настолько близкими к $-\infty$ и $+\infty$, чтобы сумма интегралов от $|f(x)|$

---

*) Учитывая, что $\int_0^a e^{-\alpha x}\,dx < \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{a}$.

по интервалам $(-\infty, c]$ и $[d, +\infty)$ была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Так как в силу леммы Римана (§ 2) $\int_c^d f(x)\sin ax\,dx \to 0$ при $a \to +\infty$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $K > 0$, что $\left|\int_c^d f(x)\sin ax\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $a > K$. Тогда при $a > K$ будем иметь:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{c} |f(x)|\,dx + \left|\int_c^d f(x)\sin ax\,dx\right| + \int_d^{+\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon;$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx \to 0 \qquad \text{при } a \to +\infty.$$

Достаточное условие представимости функции интегралом Фурье

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на всей числовой прямой, имеющая на каждом конечном сегменте не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$. Последнее означает, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

есть конечная величина (интеграл сходится).

Согласно сказанному в § 6 в каждой точке дифференцируемости x_0 функции $f(x)$ имеем (при $l > |x_0|$):

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x_0}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x_0}{l}\right),$$

где коэффициенты определяются формулами (1.20). Следовательно,

$$f(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\cdot\cos\frac{n\pi x_0}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\cdot\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi(x-x_0)}{l}\,dx.$$

Полагая $u_n=\frac{n\pi}{l}$ $\left(\text{тогда } \Delta u_n=\frac{\pi}{l};\ \frac{1}{l}=\frac{1}{\pi}\Delta u_n\right)$, получим:

$$f(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int_{-l}^{l} f(x)\cos u_n(x-x_0)\,dx.$$

При $l\to+\infty$, очевидно,

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\to 0\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=0.$$

Естественно предположить, что при $l\to+\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int_{-l}^{l} f(x)\cos u_n(x-x_0)\,dx\to$$

$$\to\int_{0}^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u(x-x_0)\,dx$$

(но это не очевидно!). Если это так, то полученное для $f(x_0)$ выражение даст в пределе:

$$f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u(x-x_0)\,dx.$$

Покажем, что это действительно так.

Положим

$$I(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^a du\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u(x-x_0)\,dx.$$

Так как $|f(x)\cos u(x-x_0)|\leqslant|f(x)|$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, то можно изменить последовательность интегрирования и мы получим:

$$I(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int_0^a\cos u(x-x_0)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\sin a(x-x_0)}{x-x_0}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+x)\frac{\sin ax}{x}\,dx$$

(последний интеграл получен из предыдущего заменой x на x_0+x). Если $f(x_0)=0$, то $\frac{f(x_0+x)}{x}\to f'(x_0)$ при $x\to 0$, и, следовательно, функция $\varphi(x)=\frac{f(x_0+x)}{x}$ после надлежащего доопределения в точке $x=0$ становится непрерывной в окрестности нуля и будет абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, ибо при достаточно малом ε она непрерывна на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и вне его $|\varphi(x)|\leqslant\frac{|f(x_0+x)|}{\varepsilon}$. Следовательно, в силу леммы Римана для бесконечного промежутка имеем:

$$I(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\sin ax\,dx\to 0 \quad \text{при } a\to+\infty.$$

В общем случае [когда значение $f(x_0)$ может быть любым] положим:

$$\psi(x)=\begin{cases} f(x_0) & \text{при } x_0-1\leqslant x\leqslant x_0+1;\\ 0 & \text{для других значений } x;\end{cases}\qquad \tilde{f}(x)=f(x)-\psi(x).$$

Тогда

$$I(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x_0+x)\frac{\sin ax}{x}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_0+x)\frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

По доказанному первое слагаемое правой части стремится к нулю при $a\to+\infty$, ибо $\tilde{f}(x_0)=0$. Второе слагаемое правой части равно

$$\frac{f(x_0)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{f(x_0)}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin x}{x}\,dx\to\frac{f(x_0)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=f(x_0)$$

$$\text{при } a\to+\infty$$

(интеграл в средней части получен из предшествующего заменой ax на x). Таким образом, в точках дифференцируемости x_0 функции $f(x)$ имеем:

$$f(x_0)=\lim I(a)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos u(x-x_0)\,dx.$$

Заменяя x_0 на x и x на t, доказанное предложение можно формулировать так:

Теорема. Если $f(x)$ имеет на каждом конечном интервале не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, то в каждой точке x, в которой $f(x)$ дифференцируема, имеем:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\,dt. \tag{1.35}$$

Правая часть формулы (1.35) называется *двойным интегралом Фурье* функции $f(x)$.

Так как $\cos u(t-x)=\cos ut\cdot\cos ux+\sin ut\cdot\sin ux$, то $\left(\text{после внесения множителя } \frac{1}{\pi}\right)$ внутренний интеграл в формуле (1.35) можно преобразовать так:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt\cdot\cos ux+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt\cdot\sin ux=a(u)\cos ux+b(u)\sin ux,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a(u)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt \quad (u\geqslant 0),\\ b(u)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt \quad (u\geqslant 0).\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Тогда (1.35) принимает вид

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]\,du. \tag{1.37}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (1.37), называется *интегралом Фурье* для функции $f(x)$. Таким образом, функция $f(x)$ представляется своим интегралом Фурье во всех точках дифференцируемости. Заметим, что это достаточное условие представимости функции своим интегралом Фурье не является необходимым, представимость интегралом Фурье будет иметь место и при более общих условиях.

Формула (1.37) показывает, что интеграл Фурье можно рассматривать как континуальный аналог ряда Фурье: вместо суммирования по индексу n, пробегающему целые значения, мы имеем интегрирование по непрерывно изменяющемуся переменному u; вместо коэффициентов Фурье, зависящих от целого индекса n, мы имеем функции $a(u)$, $b(u)$ от непрерывно изменяющегося переменного u, определяемые формулами (1.36).

§ 9. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Преобразуем подынтегральное выражение формулы (1.37) с помощью формулы Эйлера. Имеем:

$$\begin{aligned}
&a(u)\cos ux + b(u)\sin ux = \\
&= a(u)\frac{e^{iux}+e^{-iux}}{2} + b(u)\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2i} = \\
&= a(u)\frac{e^{iux}+e^{-iux}}{2} - ib(u)\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2} = \\
&= \frac{a(u)-ib(u)}{2}e^{iux} + \frac{a(u)+ib(u)}{2}e^{-iux} = \\
&= c(u)e^{iux} + c(-u)e^{-iux},
\end{aligned}$$

где положено

$$c(u) = \frac{a(u)-ib(u)}{2}; \quad c(-u) = \frac{a(u)+ib(u)}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^\lambda [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\,du = \\
&= \int_0^\lambda [c(u)e^{iux} + c(-u)e^{-iux}]\,du = \\
&= \int_0^\lambda c(u)e^{iux}\,du + \int_0^\lambda c(-u)e^{-iux}\,du = \\
&= \int_0^\lambda c(u)e^{iux}\,du + \int_{-\lambda}^0 c(u)e^{iux}\,du = \int_{-\lambda}^\lambda c(u)e^{iux}\,du,
\end{aligned}$$

так как после замены u на $-u$ интеграл $\int_0^\lambda c(-u)e^{-iux}\,du$ переходит в $\int_{-\lambda}^0 c(u)e^{iux}\,du$.

Для $c(u)$ получим выражение

$$c(u)=\frac{a(u)-ib(u)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt - i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ut - i\sin ut)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt \quad (u\geqslant 0).$$

Непосредственно видно, что эти формулы верны и при $u<0$, например, из того, что $c(-u)=\overline{c(u)}$.

Из формулы (1.37) получаем теперь:

$$f(x)=\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{0}^{\lambda}[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]\,du=$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} c(u)\,e^{iux}\,du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(u)\,e^{iux}\,du$$

$\left(\text{понимая} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \text{как} \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\right)$.

Итак, в точках дифференцируемости функции $f(x)$

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(u)\,e^{iux}\,du, \tag{1.38}$$

где

$$c(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt. \tag{1.38$'$}$$

Выражение для $f(x)$ в форме (1.38) является *комплексной формой интеграла Фурье* для функции $f(x)$.

Если в формуле (1.38) заменить $c(u)$ его выражением, то получим в точках дифференцируемости функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt \tag{1.39}$$

или, после внесения e^{iux} под знак внутреннего интеграла,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iu(x-t)}\, dt. \tag{1.39'}$$

Правая часть формулы (1.39′) называется *двойным интегралом Фурье в комплексной форме.*

§ 10. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям § 8. Тогда

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt;$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\, dt=0,$$

следовательно, интеграл Фурье (1.37) принимает вид

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty} a(u)\cos ux\, du, \tag{1.40}$$

где

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt. \tag{1.40'}$$

Это — *интеграл Фурье для четной функции* $f(x)$. Заменяя здесь $a(u)$ его выражением, получим *двойной интеграл Фурье для четной функции*:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos ux\, du \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt. \tag{1.41}$$

Пусть теперь $f(x)$ — нечетная функция, удовлетворяющая условиям § 8. Тогда

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt=0;$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt;$$

следовательно, интеграл Фурье (1.37) принимает вид

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty} b(u)\sin ux\,du, \tag{1.42}$$

где

$$b(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{1.42'}$$

Это — *интеграл Фурье для нечетной функции* $f(x)$. Заменяя здесь $b(u)$ его выражением, получим *двойной интеграл Фурье для нечетной функции*:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin ux\,du\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{1.43}$$

Формулы (1.41) и (1.43) можно перефразировать следующим образом.

Положим

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt. \tag{1.41'}$$

Тогда из (1.41) следует [если $f(x)$ — четная функция, удовлетворяющая отмеченным выше условиям], что в точках дифференцируемости функции $f(x)$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\,dt.$$

Называя выражение, стоящее в правой части (1.41′), *косинус-трансформацией* функции $f(x)$, приходим к закону взаимности: если $\varphi(x)$ есть косинус-трансформация четной функции $f(x)$, то $f(x)$ есть косинус-трансформация от $\varphi(x)$.

Положим

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt. \qquad (1.43')$$

Тогда из (1.43) следует [если $f(x)$ — нечетная функция, удовлетворяющая отмеченным выше условиям], что в точках дифференцируемости функции f

$$f(x)\doteq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \psi(t)\sin xt\,dt.$$

Называя выражение, стоящее в правой части (1.43′), *синус-трансформацией* функции $f(x)$, приходим к закону взаимности: если $\psi(x)$ есть синус-трансформация нечетной функции $f(x)$, то $f(x)$ есть синус-трансформация от $\psi(x)$.

Пример. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } |x|<1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x|=1, \\ 0 & \text{при } |x|>1. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ — четная, следовательно, на основании (1.40) имеем:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty} a(u)\cos ux\,du;$$

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin ut}{u}\right|_{t=0}^{t=1}=\frac{2\sin u}{\pi u},$$

поэтому

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\cos ux\,du.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\cos ux\,du=\begin{cases}1, & \text{если } |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x|=1,\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases} \quad (1.44)$$

Выражение (1.44) называется *разрывным множителем Дирихле.*

§ 11. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Будем рассматривать функции на каком-нибудь сегменте $[a, b]$ (для простоты будем предполагать их непрерывными).

Определение. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* на $[a, b]$, если

$$\int_{a}^{b}\varphi(x)\psi(x)\,dx=0. \quad (1.45)$$

Ортогональность функций не нарушается при умножении функций на постоянные множители.

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется *нормированной* на $[a, b]$, если

$$\int_{a}^{b}[\varphi(x)]^2\,dx=1. \quad (1.45')$$

Всякая не исчезающая тождественно непрерывная функция $\varphi(x)$ может быть сделана нормированной при умножении на подходящий постоянный множитель (нормирующий множитель). В самом деле, постоянный множитель λ нужно взять так, чтобы

$$\int_{a}^{b}[\lambda\varphi(x)]^2\,dx=1.$$

откуда получаем формулу для нормирующего множителя функции $\varphi(x)$:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{\int\limits_a^b [\varphi(x)]^2\,dx}}. \tag{1.46}$$

Например, для x на $[0, 1]$

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{\int\limits_0^1 x^2\,dx}} = \pm\sqrt{3}.$$

Рассмотрим бесконечную систему функций на $[a, b]$:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{S}$$

Назовем систему (S) *ортогональной*, если все функции этой системы не исчезают тождественно и попарно ортогональны, т. е. $\int\limits_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0$ при $i \neq k$. Назовем систему (S) *ортонормированной*, если она ортогональная и все ее функции нормированы, т. е. если

$$\int\limits_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Предположим, что некоторая функция $f(x)$ разлагается относительно ортогональной системы (S) в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

Умножая на $\varphi_n(x)$ и интегрируя почленно в пределах от a до b, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = a_1\int\limits_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_n(x)\,dx + a_2\int\limits_a^b \varphi_2(x)\,\varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + a_n\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx + \ldots = a_n\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx,$$

откуда

$$a_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.47}$$

Определение. Рядом Фурье какой-нибудь функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ относительно ортогональной системы (S) назовем ряд

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

коэффициенты которого определены по формулам (1.47). Будем писать

$$f(x) \sim a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

или, короче,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x). \tag{1.48}$$

Из этого определения отнюдь не следует, что функция непременно должна разлагаться в свой ряд Фурье относительно системы (S), а следует лишь то, что *если* функция разложилась в равномерно сходящийся ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x)$, то этот ряд будет ее рядом Фурье относительно системы (S) (но такого разложения может и не существовать!).

Пример. На сегменте $[-\pi, \pi]$ система функций

$$\frac{1}{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{T}$$

ортогональная (см. вычисление вспомогательных интегралов § 2). Обозначая коэффициенты Фурье какой-нибудь функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ относительно системы (T) через

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots, a_n,\ b_n, \ldots,$$

найдем по формулам (1.47):

$$a_0 = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{1}{2}\,dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \\ b_n &= \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

которые в данном случае превращаются в формулы (1.7) § 2.

Тригонометрические ряды Фурье являются частным случаем рядов Фурье относительно ортогональных систем функций.

Если функции, составляющие какую-нибудь ортогональную систему (S), умножить на какие-нибудь постоянные $\lambda_n \neq 0$, то получим снова ортогональную систему. Коэффициенты Фурье какой-нибудь функции при этом разделятся на λ_n [как видно из формул (1.47)], члены же ряда Фурье не изменятся $\left(\frac{a_n}{\lambda_n}\lambda_n\varphi_n = a_n\varphi_n\right)$. В случае ортонормированной системы (S) формулы (1.47) принимают вид

$$a_n = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (1.47')$$

§ 12. МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция на сегменте $[a, b]$. *Средним значением* этой функции на $[a, b]$ называется число

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Определение. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции на $[a, b]$ (для простоты будем предполагать их непрерывными). *Средним квадратическим уклонением* $f(x)$ от $\varphi(x)$ называется квадратный корень из среднего значения квадрата разности этих функций, т. е. число

$$\sqrt{\frac{\int\limits_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx}{b-a}}.$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$, не зависящий от функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, иногда называют средним квадратическим уклонением $f(x)$ от $\varphi(x)$ число

$$\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx}.$$

Пусть имеем какую-нибудь ортогональную систему (S) функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

на сегменте $[a, b]$. Линейные комбинации из n первых функций системы (S), т. е. выражения вида

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — любые постоянные числа, назовем для сокращения обобщенными полиномами n-го порядка.

Экстремальная задача. Из всех обобщенных полиномов n-го порядка найти тот, который имеет наименьшее среднее квадратическое уклонение от данной функции $f(x)$.

Вопрос сводится к отысканию таких $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для которых

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\right]^2 dx$$

будет наименьшим.

Не нарушая общности, можем считать систему ортонормированной (в противном случае умножением на нормирующие множители мы достигнем этого).

Имеем:

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 + \sum_1^n c_k^2 [\varphi_k(x)]^2 - 2\sum_1^n c_k f(x)\varphi_k(x) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k<l} c_k c_l \varphi_k(x)\varphi_l(x) \right\} dx =$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2 dx + \sum_1^n c_k^2 \int_a^b [\varphi_k(x)]^2 dx -$$

$$- 2\sum_1^n c_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx + 2\sum_{k<l} c_k c_l \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2 dx + \sum_1^n c_k^2 - 2\sum_1^n c_k a_k =$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2, \tag{1.49}$$

учитывая, что $\int_a^b [\varphi_k(x)]^2 dx = 1$ [так как $\varphi_k(x)$ — нормированные], $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = 0$ при $k \neq l$ [так как $\varphi_k(x)$,

$\varphi_l(x)$ ортогональны], $\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = a_k$ в силу (1.47′).
Мы видим, что интеграл будет минимальным, когда

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k - a_k)^2$$

будет минимальна, т. е. при $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, ..., $c_n = a_n$.

Итак, из всех обобщенных полиномов n-го порядка вида

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

наименьшее среднее квадратическое уклонение от данной функции $f(x)$ имеет n-я частичная сумма ряда Фурье относительно ортогональной системы (S), т. е. тот обобщенный полином n-го порядка, коэффициенты которого суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы (S).

Из формулы (1.49) находим:

$$\min\int\limits_a^b\left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx = \int\limits_a^b\left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right]^2 dx =$$
$$= \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2; \tag{1.50}$$

так как средняя часть (1.50) неотрицательна, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_1^\infty a_k^2$ сходится и имеет место *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \leqslant \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{1.51}$$

Если система (S) ортогональная (но не обязательно ортонормированная), то (1.51) следует заменить неравенством

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k^2} \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\, dx, \tag{1.51'}$$

где λ_k — нормирующий множитель для $\varphi_k(x)$ (ибо, беря $\lambda_k\varphi_k$ вместо φ_k, мы должны взять $\frac{a_k}{\lambda_k}$ вместо a_k).

Называя тригонометрическим полиномом n-й степени функцию вида

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kx + d_k \sin kx),$$

получим как частный случай решенной экстремальной задачи [когда в качестве системы (S) берется тригонометрическая система (T)] следующий результат.

Из всех тригонометрических полиномов n-й степени наименьшее среднее квадратическое уклонение на $[-\pi, \pi]$ от заданной на этом сегменте функции $f(x)$ имеет тригонометрический полином

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

коэффициенты которого определяются по формулам Фурье (1.7) из § 2.

ГЛАВА II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Вектором называется направленный отрезок прямой. Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину, параллельны и одинаково направлены.

В печати векторы часто обозначают полужирными буквами. Например, буква $\boldsymbol{a}$ обозначает вектор в отличие от скаляра (числа) *).

Длину вектора $\boldsymbol{a}$ будем обозначать $|\boldsymbol{a}|$.

Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначим $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. Угол между векторами берется в границах от 0 до π. Угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ теряет определенность, если хотя бы один из векторов нулевой.

Проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ненулевой вектор $\boldsymbol{b}$ обозначим $\boldsymbol{a}_b$. Имеем

$$\boldsymbol{a}_b = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

Суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор — диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и обозначается $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Сложение векторов подчиняется переместительному закону $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ и сочетательному закону $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Из этих законов следует, что при сложении векторов допустимы изменение порядка слагаемых и любая группировка слагаемых. Вычитание векторов есть действие, обратное сложению.

---

*) Иногда вектор записывается символом $\overrightarrow{AB}$, если A есть начало вектора, а B — конец его.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр λ, обозначаемое $\boldsymbol{a}\lambda$ или $\lambda\boldsymbol{a}$, определяется как вектор, параллельный $\boldsymbol{a}$, одинаково или противоположно направленный, смотря по тому, будет ли $\lambda > 0$ или < 0, имеющий длину $|\boldsymbol{a}\lambda| = |\boldsymbol{a}||\lambda|$. Произведение вектора на скаляр подчиняется сочетательному закону $\boldsymbol{a}\lambda \cdot \mu = \boldsymbol{a} \cdot \lambda\mu$ ($\boldsymbol{a}$ — вектор, λ и μ — скаляры) и двум распределительным законам: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\lambda = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}\lambda$; $\boldsymbol{a}(\lambda+\mu) = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{a}\mu$ ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — векторы; λ, μ — скаляры).

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть скаляр, обозначаемый $\boldsymbol{ab}$ и определяемый формулой

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

Очевидно, $\boldsymbol{ab} = a_b|\boldsymbol{b}|$. Скалярное произведение векторов подчиняется перестановочному закону $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$ и распределительному закону $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

Векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор, обозначаемый $[\boldsymbol{ab}]$, имеющий длину, равную площади параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, ортогональный плоскости этого параллелограмма и направленный так, что видимый из конца вектора $[\boldsymbol{ab}]$ переход от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ происходит в положительном направлении (в случае правой ориентировки). Векторное произведение двух векторов подчинено антикоммутативному закону $[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$ и распределительному закону $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.

Произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, обозначаемое $(\boldsymbol{abc})$, есть скаляр, равный $\pm V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, причем знак $\pm$ берется в зависимости от положительной или отрицательной ориентировки системы рассматриваемых векторов. При круговой перестановке множителей оно не меняется: $(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca})$; при перестановке двух множителей меняется знак: $(\boldsymbol{abc}) = -(\boldsymbol{bac})$. Произведение трех векторов равно смешанному векторно-скалярному произведению $(\boldsymbol{abc}) = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$.

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве (правую). Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по осям Ox, Oy, Oz. Пусть $\boldsymbol{a}$ — какой-нибудь вектор. Проекции его на Ox, Oy, Oz (или, что то же, на $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) называются его координатами. Координаты $\boldsymbol{a}$ обозначим a_x, a_y, a_z. Два вектора равны тогда и только тогда, когда их координаты соответственно равны. Поэтому для доказательства равенства двух векторов достаточно установить равенство соответствующих координат.

Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть разложен по ортам:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z.$$

При сложении векторов координаты их складываются (при вычитании вычитаются), при умножении вектора на скаляр координаты умножаются на этот скаляр.

Выражение скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через их координаты имеет вид

$$\boldsymbol{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \tag{2.1}$$

что непосредственно получается, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разложить по ортам, выполнить умножение полученных сумм и принять во внимание, что $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1$, $\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0$.

Выражение векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через их координаты имеет вид

$$[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

что непосредственно получается, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разложить по ортам, выполнить умножение полученных сумм и принять во внимание, что $[\boldsymbol{ii}]=[\boldsymbol{jj}]=[\boldsymbol{kk}]=0$ (нулевой вектор); $[\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}$; $[\boldsymbol{jk}]=\boldsymbol{i}$; $[\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}$; $[\boldsymbol{ji}]=-\boldsymbol{k}$; $[\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}$; $[\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}$.

Выражение произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ через координаты на основании сказанного имеет вид

$$\boldsymbol{abc}=[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{ab}]_x c_x+[\boldsymbol{ab}]_y c_y+[\boldsymbol{ab}]_z c_z=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

§ 2. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть $\boldsymbol{a}(t)$ — вектор, зависящий от скалярного переменного t. *Производная* векторной функции $\boldsymbol{a}(t)$ определяется как вектор

$$\boldsymbol{a}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t},$$

если этот векторный предел существует (предел переменного вектора есть такой вектор, что длина разности между ним и переменным вектором стремится к нулю). Если вектор-функция $\boldsymbol{a}(t)$ имеет производную (дифференцируема), то она подавно непрерывна в рассматриваемой точке, т. е. $\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)$ стремится к нулевому вектору при $\Delta t \to 0$.

Правила дифференцирования векторных функций выводятся как правила дифференцирования скалярных функций в дифференциальном исчислении. Если $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b}(t)$ — дифференцируемые векторные функции, $\varphi(t)$ — дифференцируемая скалярная функция, то

$$(\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t))'=\boldsymbol{a}'(t)+\boldsymbol{b}'(t); \tag{2.4}$$

$$(\boldsymbol{a}(t)\varphi(t))'=\boldsymbol{a}'(t)\varphi(t)+\boldsymbol{a}(t)\varphi'(t); \tag{2.5}$$

$$(\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t))'=\boldsymbol{a}'(t)\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}'(t); \tag{2.6}$$

$$[\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t)]'=[\boldsymbol{a}'(t)\boldsymbol{b}(t)]+[\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}'(t)], \tag{2.7}$$

причем в левых частях (2.4), (2,5), (2.7) фигурируют производные векторных функций; в левой части (2.6) — производная скалярной функции; в правых частях (2.4), (2.5), (2.7) знак $+$ обозначает сложение векторов; в правой части (2.6) знак $+$ обозначает сложение скаляров.

Если $\boldsymbol{a}_0$ — постоянный вектор, φ_0 — постоянный скаляр, то получаем ряд формул «вынесения постоянного множителя за знак производной» в произведениях трех типов (вектор на скаляр, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов):

$$(\boldsymbol{a}(t)\varphi_0)'=\boldsymbol{a}'(t)\varphi_0; \tag{2.5$'$}$$

$$(\boldsymbol{a}_0\varphi(t))'=\boldsymbol{a}_0\varphi'(t); \tag{2.5$''$}$$

$$(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}(t))'=\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}'(t); \tag{2.6$'$}$$

$$[\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}(t)]'=[\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}'(t)]. \tag{2.7$'$}$$

Эти формулы получаются из (2.5), (2.6), (2.7), если учесть, что производная векторной постоянной есть нулевой вектор.

Производные высших порядков от вектор-функций определяются как результат последовательного дифференцирования.

Рассмотрим систему прямоугольных координат в пространстве. Каждой точке $M(x, y, z)$ отнесем вектор $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$ с такими же координатами. Такое соответствие между точками и векторами будет взаимно однозначным. Таким образом, каждой точке соответствует вектор, каждому вектору соответствует точка.

Векторное параметрическое уравнение $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ [$\boldsymbol{r}(t)$ — векторная функция одного скалярного переменного] после перевода на координатный язык дает три координатных параметрических уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

и изображает некоторую кривую в пространстве. Производная $\boldsymbol{r}'(t)$ будет касательным вектором к этой кривой.

Векторное параметрическое уравнение $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ [$\boldsymbol{r}(u, v)$ — векторная функция двух скалярных переменных] после перевода на координатный язык дает три координатных параметрических уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right\}$$

и изображает некоторую поверхность в пространстве.

§ 3. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим пространственную кривую, заданную векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

где за параметр взята длина дуги s, отсчитываемая от некоторой точки кривой (фигурирующая в этом уравнении вектор-функция предполагается трижды непрерывно дифференцируемой).

Касательный вектор $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'(s)$ при таком выборе параметра будет единичным для всех точек кривой (ибо отношение хорды к дуге при стягивании последней в точку стремится к единице). Дифференцируя равенство $\boldsymbol{r}'^2=1$, получим $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''=0$, следовательно, вектор $\boldsymbol{r}''$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$.

Единичный вектор $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|} = \frac{\boldsymbol{\tau}'}{|\boldsymbol{\tau}'|}$ (если $\boldsymbol{r}''$ — ненулевой вектор) определяет направление *главной нормали* кривой (в рассматриваемой точке); единичный вектор $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau\nu}]$ определяет направление *бинормали* кривой (в рассматриваемой точке). Три попарно ортогональных единичных вектора $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ образуют *сопровождающий трехгранник* кривой (в рассматриваемой точке). Плоскости, проходящие через рассматриваемую точку кривой и перпендикулярные к $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, называются соответственно *нормальной*, *спрямляющей* и *соприкасающейся* плоскостями кривой (в рассматриваемой точке).

Заметим, что если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — три попарно ортогональных единичных вектора и вектор $\boldsymbol{a}$ разложен по ним: $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3$ (c_i — скаляры), то, умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{e}_i$, получим $\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_i = c_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Разложим теперь производные векторов, образующих сопровождающий трехгранник, по векторам, его образующим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= c_{11}\boldsymbol{\tau} + c_{12}\boldsymbol{\nu} + c_{13}\boldsymbol{\beta}; \\ \boldsymbol{\nu}' &= c_{21}\boldsymbol{\tau} + c_{22}\boldsymbol{\nu} + c_{23}\boldsymbol{\beta}; \\ \boldsymbol{\beta}' &= c_{31}\boldsymbol{\tau} + c_{32}\boldsymbol{\nu} + c_{33}\boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Дифференцирование равенств $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$; $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$; $\boldsymbol{\beta}^2 = 1$ показывает, что $c_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$; дифференцирование равенств $\boldsymbol{\tau\nu} = 0$; $\boldsymbol{\nu\beta} = 0$; $\boldsymbol{\beta\tau} = 0$ показывает, что $c_{ij} + c_{ji} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$; наконец, из определения $\boldsymbol{\nu}$ видно, что $c_{13} = 0$; $c_{12} > 0$; следовательно, если обозначить $c_{12} = k$, $c_{23} = \varkappa$, то вышенаписанные разложения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \phantom{-k\boldsymbol{\tau}} \quad k\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau} \qquad\qquad + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= \phantom{-k\boldsymbol{\tau}} -\varkappa\boldsymbol{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Формулы (2.8) называются *формулами Серре — Френе*, величины k и $\varkappa$ называются соответственно *кривизной* и *кручением* пространственной кривой (в рассматриваемой точке). Обратные величины $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{\varkappa}$ называются соответственно *радиусом кривизны* и *радиусом кручения* кривой (в рассматриваемой точке).

С помощью (2.8) находим:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\tau};\\
&\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{\tau}' = k\boldsymbol{\nu};\\
&\boldsymbol{r}''' = k'\boldsymbol{\nu} + k\boldsymbol{\nu}' = k'\boldsymbol{\nu} + k(-k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}) = -k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta};\\
&(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''') = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']\,\boldsymbol{r}''' = k\boldsymbol{\beta}(-k^2\boldsymbol{\tau} + k'\boldsymbol{\nu} + k\varkappa\boldsymbol{\beta}) = k^2\varkappa;
\end{aligned}$$

следовательно, для кривизны и кручения пространственной кривой получаем формулы

$$\left.\begin{aligned}
k &= \sqrt{\boldsymbol{r}''^2},\\
\varkappa &= \frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{\boldsymbol{r}''^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Пусть теперь пространственная кривая задана векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

при любом выборе параметра t (фигурирующая в этом уравнении вектор-функция предполагается трижды непрерывно дифференцируемой). Пользуясь для обозначения производных по t точками и сохраняя для обозначения дифференцирования по s штрихи, будем иметь (учитывая правила замены переменных при дифференцировании, формулы Серре — Френе и свойства определителей):

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}; \quad \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{s}^2;\\
&\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}''\dot{s}^2 + \boldsymbol{r}'\ddot{s} = k\dot{s}^2\boldsymbol{\nu} + \ddot{s}\boldsymbol{\tau};\\
&[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}] = k\dot{s}^3\boldsymbol{\beta}; \quad [\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}]^2 = k^2\dot{s}^6;\\
&\dddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'''\dot{s}^3 + 3\boldsymbol{r}''\dot{s}\ddot{s} + \boldsymbol{r}'\dddot{s};\\
&(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}}) = (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')\,\dot{s}^6 = k^2\varkappa\dot{s}^6;
\end{aligned}$$

отсюда вытекают формулы для кривизны и кручения пространственной кривой при любом выборе параметра (в точках, где $\dot{\boldsymbol{r}}$ — ненулевой вектор):

$$\left.\begin{aligned}
k^2 &= \frac{[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}]^2}{(\dot{\boldsymbol{r}}^2)^3} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2 - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})^2}{(\dot{\boldsymbol{r}}^2)^3},\\
\varkappa &= \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}]^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{\dot{\boldsymbol{r}}^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2 - (\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9$'$}$$

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Если каждой точке M некоторой области пространства отнесен скаляр $\varphi(M)$, то образуется *скалярное поле*. Если задать систему прямоугольных координат (например, правую), то каждая точка M будет иметь некоторые координаты x, y, z и функция точки $\varphi(M)$ станет функцией трех переменных $\varphi(x, y, z)$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{n}$ — какое-нибудь «направление» ($\boldsymbol{n}$ обозначает единичный вектор). *Производной по направлению* $\boldsymbol{n}$ в точке M от скалярной функции φ называется предел (если он существует) отношения приращения φ при смещении точки M по направлению $\boldsymbol{n}$ к величине смещения точки M, когда последнее стремится к нулю. Производная по направлению $\boldsymbol{n}$ обозначается $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Таким образом, по определению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1}, \tag{2.10}$$

где M_1 лежит на луче, выходящем из M по направлению $\boldsymbol{n}$.

После введения координат $\varphi(M)$ становится функцией трех переменных $\varphi(x, y, z)$. Предположим, что эта функция имеет непрерывные частные производные первого порядка. Пусть α, β, γ — углы направления $\boldsymbol{n}$ с Ox, Oy, Oz. Полагая $MM_1 = \rho$, перепишем формулу (2.10) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\varphi(x + \rho\cos\alpha,\ y + \rho\cos\beta,\ z + \rho\cos\gamma) - \varphi(x, y, z)}{\rho} \tag{2.10$'$}$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\psi(\rho) - \psi(0)}{\rho} = \psi'(0),$$

где

$$\psi(\rho) = \varphi(x + \rho\cos\alpha,\quad y + \rho\cos\beta,\quad z + \rho\cos\gamma).$$

Формула полной производной дает

$$\psi'(\rho) = \varphi'_x(x + \rho\cos\alpha,\ y + \rho\cos\beta,\ z + \rho\cos\gamma)\cos\alpha + \\ + \varphi'_y(\ldots)\cos\beta + \varphi'_z(\ldots)\cos\gamma;$$

следовательно,

$$\psi'(0)=\varphi'_x(x, y, z)\cos\alpha+\varphi'_y(x, y, z)\cos\beta+\varphi'_z(x, y, z)\cos\gamma$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2.10''}$$

Определение. *Градиентом* скалярной функции φ в точке M называется вектор

$$\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{2.11}$$

Возьмем какое-нибудь направление $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор); пусть α, β, γ — его углы с координатными осями; тогда $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$. На основании формулы (2.1), выражающей скалярное произведение векторов через координаты, имеем:

$$\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma.$$

Следовательно, учитывая (2.10''), получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{n}=(\operatorname{grad}\varphi)_n, \tag{2.12}$$

т. е. производная по какому-нибудь направлению $\boldsymbol{n}$ равна проекции градиента на это направление. Отсюда получаем следующую *инвариантную* характеристику градиента: направление градиента характеризуется тем, что производная по этому направлению будет наибольшей (среди производных от φ в данной точке по всевозможным направлениям); длина градиента есть наибольшая из производных по направлениям в данной точке. Имеем

$$|\operatorname{grad}\varphi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}=\max\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \tag{2.13}$$

Поверхности уровня скалярного поля

Геометрическое место точек, в которых $\varphi(M)$ имеет постоянное значение, называется *поверхностью уровня*. После задания системы координат уравнение поверхности уровня принимает вид:

$$\varphi(x, y, z)=C.$$

Уравнения нормали к этой поверхности в точке x, y, z будут:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Отсюда видно, что направление нормали совпадает с направлением градиента в рассматриваемой точке.

Формальные свойства градиента

Пусть φ и ψ — два скалярных поля, имеющих градиенты; f — дифференцируемая скалярная функция одной или нескольких скалярных переменных (с надлежащей областью определения). Тогда

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi)=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi,\psi)=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi+\frac{\partial f}{\partial\psi}\operatorname{grad}\psi, \tag{2.17}$$

причем в правых частях (2.14), (2.15), (2.17) знак $+$ обозначает сложение векторов и встречающиеся в правых частях (2.15), (2.16), (2.17) произведения суть произведения вектора на скаляр. В самом деле,

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\boldsymbol{i}\frac{\partial(\varphi+\psi)}{dx}+\ldots=$$
$$=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots\right)+\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\ldots\right)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi;$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\boldsymbol{i}\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}+\ldots=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\ldots=$$
$$=\psi\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots\right)+\varphi\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\ldots\right)=\psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi;$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi)=\boldsymbol{i}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial x}+\ldots=\boldsymbol{i}f'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots=$$
$$=f'(\varphi)\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots\right)=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi,\psi)=\boldsymbol{i}\frac{\partial f(\varphi,\psi)}{\partial x}+\ldots=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots\right)+\frac{\partial f}{\partial\psi}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\ldots\right)=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi+\frac{\partial f}{\partial\psi}\operatorname{grad}\psi.$$

5 Зак. 1944. П. И. Романовский

Многоточия всюду обозначают, что следует вписать второе и третье слагаемые, аналогичные первому, получающиеся из него в результате замены $\boldsymbol{i}$ на $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, а x на y и z.

§ 5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Дугу кривой называют *гладкой*, если функции, фигурирующие в ее параметрических уравнениях, непрерывно дифференцируемы. Дугу называют *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких дуг.

Пусть $P(x, y, z)$ — непрерывная функция на кусочно-гладкой дуге AB (рис. 3). Разобьем дугу AB на части с помощью точек деления $M_i(x_i, y_i, z_i)$. На каждой части M_iM_{i+1} возьмем какую-нибудь точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$; значение рассматриваемой функции в этой точке умножим на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и составим сумму таких произведений

$$\sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i.$$

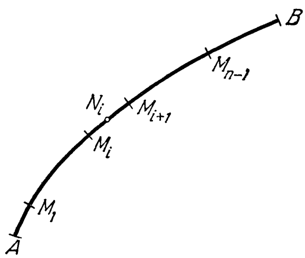


Рис. 3.

Если наибольшая из длин частей дуги AB стремится к нулю, то эта сумма стремится к определенному пределу, который называется *криволинейным интегралом* от $P(x, y, z)$ вдоль дуги AB по переменному x и обозначается знаком $\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx$. Аналогично определяются криволинейные интегралы по переменным y и z. Таким образом,

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx = \lim \sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i; \tag{2.18}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \lim \sum_i Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i; \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{AB} R(x, y, z)\,dz = \lim \sum_i R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i, \tag{2.20}$$

где P, Q, R — непрерывные функции на дуге AB.

Далее вводим понятие комбинированного криволинейного интеграла

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{AB} Q\,dy + \int\limits_{AB} R\,dz. \quad (2.21)$$

Из определения криволинейного интеграла непосредственно следует, что при перемене направления дуги интеграл лишь меняет свой знак

$$\int\limits_{BA} = -\int\limits_{AB}. \quad (2.22)$$

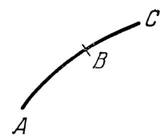


Рис. 4.

Далее, если дугу разбить на части, то интеграл вдоль всей дуги равен сумме интегралов вдоль ее частей, например (рис. 4),

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что интеграл вдоль замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки, а зависит лишь от направления обхода кривой. В самом деле (рис. 5),

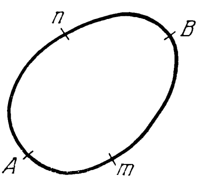


Рис. 5.

$$\int\limits_{AmBnA} = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA}; \quad \int\limits_{BnAmB} = \int\limits_{BnA} + \int\limits_{AmB},$$

откуда (так как правые части этих равенств одинаковы)

$$\int\limits_{AmBnA} = \int\limits_{BnAmB}.$$

Из определения криволинейного интеграла сразу следует, что постоянные множители выносятся за знак интеграла, интеграл суммы равен сумме интегралов. Из (2.18) видно, что $\int\limits_{AB} P\,dx = 0$, если дуга AB расположена в плоскости $x = \text{const}$. Аналогично из (2.19) и (2.20) следует, что

$\int\limits_{AB} Q\,dy = 0$, когда AB расположена в плоскости $y = \text{const}$,

и $\int\limits_{AB} R\,dz = 0$, когда AB расположена в плоскости $z = \text{const}$.

Преобразование криволинейного интеграла в простой интеграл

Пусть даны параметрические уравнения дуги AB:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t),\\ y &= y(t),\\ z &= z(t), \end{aligned}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T$$

(мы предполагаем, что все три функции непрерывно дифференцируемы). По теореме Лагранжа (рис. 6)

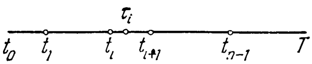


Рис. 6.

$$\Delta x(t_i) = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \\ = x'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = x'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

где τ_i лежит между t_i и t_{i+1}.

Пусть $M(x_i, y_i, z_i)$ — точка кривой, соответствующая значению параметра t_i, $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ — точка кривой, соответствующая значению параметра τ_i; тогда

$$\sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i = \sum_i P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]\,x'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

откуда в пределе при стремлении к нулю наибольшей из разностей Δt_i

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt = \\ = \int\limits_{t_0}^{T} P[x(t), y(t), z(t)]\,dx(t).$$

Заметим, что эти выкладки не только дают выражение криволинейного интеграла через простой, но и доказывают существование криволинейного интеграла [в случае непрерывно дифференцируемых $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$], если считать существование простого интеграла от непрерывной функции известным.

Аналогичные формулы имеют место для $\int\limits_{AB} Q\,dy$, $\int\limits_{AB} R\,dz$. Мы видим, что для преобразования криволинейного интеграла в простой интеграл следует взять параметрические уравнения пути интегрирования, затем всюду под знаком криволинейного интеграла заменить x, y, z их выражениями через параметр и после этого рассматривать интеграл как простой по параметру, взятый в пределах изменения параметра.

Если, например, имеем дугу

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x), \end{aligned}\right\} x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

то (беря x за параметр) получим:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} P[x, y(x), z(x)]\,dx.$$

Условие независимости криволинейного интеграла от формы пути

Будем говорить, что криволинейный интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{2.24}$$

не зависит от формы пути в некоторой области (в которой P, Q, R предполагаются непрерывными), если этот интеграл, вдоль всяких двух кусочно-гладких дуг (лежащих в рассматриваемой области) с общим началом и общим концом, имеет одинаковую величину. В этом случае при обозначении интеграла достаточно лишь указывать начальную и конечную точку пути (не называя своего пути) и употреблять запись $\int\limits_{M_1}^{M_2}$ или $\int\limits_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}$ (где выписаны координаты точек M_1 и M_2).

Если подынтегральное выражение в (2.24) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$, то для какой-нибудь гладкой дуги M_1M_2 с параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}\right\} t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

получим (учитывая свойство инвариантности дифференциального обозначения):

$$\int\limits_{M_1M_2} du(x, y, z) = \int\limits_{t_1}^{t_2} du\,[x(t), y(t), z(t)] =$$

$$= u\,[x(t), y(t), z(t)]\Big|_{t_1}^{t_2} = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1).$$

То же будет для кусочно-гладкой дуги M_1M_2, и следовательно, криволинейный интеграл не зависит от формы пути.

Обратно, предположим, что криволинейный интеграл (2.24) не зависит от формы пути и положим

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0,\, y_0,\, z_0}^{x,\, y,\, z} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Тогда

$$u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \int\limits_{x,\, y,\, z}^{x+\Delta x,\, y,\, z} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Беря в последнем интеграле за путь интегрирования прямолинейный отрезок и преобразуя криволинейный интеграл в простой, получим:

$$u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y, z)\,dt =$$

$$= P(x + \theta\Delta x, y, z)\,\Delta x \qquad (0 < \theta < 1).$$

Так как

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y, z) \to P(x, y, z)$$

при $\Delta x \to 0$, то, следовательно, существует $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = P$. Аналогично найдем, что существуют $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, причем $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. Отсюда видно, что

$$du(x, y, z) = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

т. е. подынтегральное выражение в (2.24) есть полный дифференциал.

Итак, для независимости криволинейного интеграла от формы пути (в некоторой области) необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом некоторой функции (в упомянутой области).

Заметим, что независимость криволинейного интеграла (2.24) от формы пути в некоторой области равносильна равенству нулю этого интеграла вдоль всякого замкнутого пути, лежащего в рас-

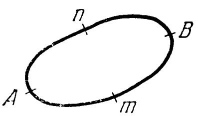


Рис. 7.

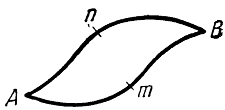


Рис. 8.

сматриваемой области. В самом деле, пусть имеем независимость от формы пути и $AmBnA$ — какой-нибудь замкнутый путь; тогда (рис. 7)

$$\int\limits_{AmBnA} = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = \int\limits_{AmB} - \int\limits_{AnB} = 0.$$

Обратно, пусть имеем равенство нулю интегралов вдоль замкнутых путей, и пусть AmB и AnB — два пути с общим началом и общим концом; тогда (рис. 8)

$$\int\limits_{AmB} - \int\limits_{AnB} = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = \int\limits_{AmBnA} = 0; \quad \int\limits_{AmB} = \int\limits_{AnB}.$$

Условия, при которых выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ есть полный дифференциал

Если это выражение (предполагается, что P, Q, R имеют непрерывные частные производные первого порядка) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$

(в рассматриваемой области), то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=R;$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z},$$

откуда, учитывая независимость частных производных от последовательности дифференцирования, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x};\\ \frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y};\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

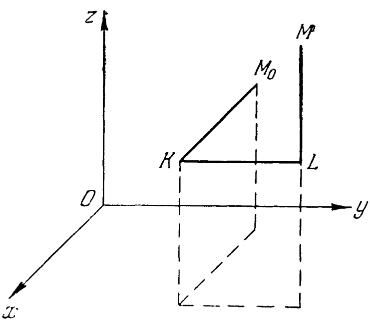


Рис. 9.

Обратно, предположим, что равенства (2.25) выполнены (в рассматриваемой области). Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка (рис. 9), $M(x, y, z)$ — переменная точка, M_0KLM — трехзвенная ломаная, стороны которой последовательно параллельны осям Ox, Oy, Oz. Положим

$$u(x, y, z)=\int\limits_{M_0KLM} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Применяя правило преобразования криволинейного интеграла в простой, находим:

$$u(x, y, z)=$$
$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt+\int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt,$$

откуда с помощью правила дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и правила дифференцирования под знаком интеграла с учетом (2.25) получаем:

$$u'_x(x, y, z) =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} Q'_x(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R'_x(x, y, t)\,dt =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} P'_y(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} P'_z(x, y, t)\,dt =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + P(x, t, z_0)\Big|_{t=y_0}^{t=y} + P(x, y, t)\Big|_{t=z_0}^{t=z} =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + [P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0)] +$$

$$+ [P(x, y, z) - P(x, y, z_0)] = P(x, y, z);$$

$$u'_y(x, y, z) = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} R'_y(x, y, t)\,dt =$$

$$= Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} Q'_z(x, y, t)\,dt =$$

$$= Q(x, y, z_0) + Q(x, y, t)\Big|_{t=z_0}^{t=z} =$$

$$= Q(x, y, z_0) + [Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0)] = Q(x, y, z);$$

$$u'_z(x, y, z) = R(x, y, z)$$

и, следовательно,

$$du(x, y, z) = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Итак, для того чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ было полным дифференциалом (в рассматриваемой области), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

(в рассматриваемой области).

В доказательстве теоремы о том, что если выполнены условия (2.25), то выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ есть полный дифференциал некоторой функции, молчаливо предполагалось, что в рассматриваемой области найдется такая точка M_0, что для любой точки M рассматриваемой области трехзвенная ломаная M_0KLM лежит в этой же области. С помощью дополнительных рассуждений можно показать, что теорема останется верной для всякой области, в которой любые два пути с общим началом и общим концом могут быть непрерывно деформированы один в другой, не выходя из области.

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Если каждой точке M некоторой области пространства отнесен вектор $\boldsymbol{a}(M)$, то образуется *векторное поле*.

Если задать систему координат (например, правую), то каждая точка M будет иметь некоторые координаты x, y, z и вектор-функция точки M становится вектор-функцией трех переменных $\boldsymbol{a}(x, y, z)$.

Криволинейный интеграл от вектор-функции

Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ — непрерывная вектор-функция на кусочно-гладкой дуге AB (рис. 10). Разобьем дугу AB на части с помощью точек деления M_i, на каждой части возьмем какую-нибудь точку N_i, значение рассматриваемой вектор-функции в этой точке скалярно умножим на вектор $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ и составим сумму этих скалярных произведений

$$\sum_i \boldsymbol{a}(N_i)\,\overrightarrow{M_iM_{i+1}}.$$

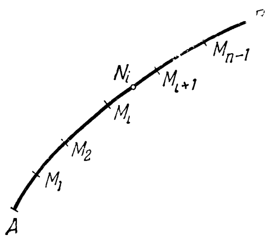


Рис. 10.

Если наибольшая из длин частей дуги AB стремится к нулю, то эта сумма стремится к определенному пределу, который называется криволинейным интегралом от $\boldsymbol{a}(M)$ вдоль дуги AB и обозначается знаком $\int\limits_{AB} \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r}$ (здесь $d\boldsymbol{r}$ есть «ориентированный элемент дуги»).

Криволинейный интеграл от вектор-функции легко выражается через обыкновенный криволинейный интеграл.

Зададим систему координат. Пусть $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор и x_i, y_i, z_i — координаты точки M_i; ξ_i, η_i, ζ_i — координаты точки N_i; тогда

$$\sum_i \boldsymbol{a}(N_i)\,\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \sum_i \boldsymbol{a}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta\boldsymbol{r}_i =$$

$$= \sum_i [a_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i + a_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_i + a_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_i],$$

откуда в пределе получаем:

$$\int_{AB} \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r} =$$

$$= \int_{AB} a_x(x, y, z)\,dx + a_y(x, y, z)\,dy + a_z(x, y, z)\,dz. \qquad (2.26)$$

Это рассуждение не только дает выражение криволинейного интеграла от вектор-функции через обыкновенный криволинейный интеграл, но дает доказательство существования его, если существование обыкновенного криволинейного интеграла считается известным.

Если L — какой-нибудь путь в заданном векторном поле, то, рассматривая векторы $\boldsymbol{a}(M)$ как силы (тогда векторное поле становится силовым полем), найдем, что скалярное произведение $\boldsymbol{a}(M_i)\cdot\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ будет (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) работой силового поля при перемещении точки от положения M_i в положение M_{i+1}. Складывая эти элементарные работы и переходя к пределу, найдем, что $\int_L \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r}$ будет работой силового поля при перемещении точки по пути L. По этой причине криволинейный интеграл $\int_L \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r}$ называется *работой векторного поля* вдоль пути L. Работа векторного поля вдоль замкнутого пути называется еще *циркуляцией векторного поля* вдоль этого замкнутого пути.

Определение. Векторное поле называется *потенциальным*, если работа этого поля не зависит от формы пути или, что равносильно, если циркуляция векторного поля вдоль каждого замкнутого пути равна нулю.

Из формулы (2.26) следует, что для потенциальности векторного поля необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл

$$\int a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$$

не зависел от формы пути. Из § 5 следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$ (*силовая функция*), иначе говоря, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0. \qquad (2.27)$$

В этом случае работа поля вдоль пути M_1M_2 равна

$$\int\limits_{M_1M_2} du(x, y, z) = u(M_2) - u(M_1) = v(M_1) - v(M_2),$$

где $v = -u$ называется *потенциалом* векторного поля. Таким образом, работа потенциального векторного поля равна приращению силовой функции или уменьшению потенциала.

Следствие. Для потенциальности векторного поля необходимо и достаточно, чтобы оно было полем градиентов некоторого скалярного поля.

В самом деле, если $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi$, то

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi(x, y, z)$$

есть полный дифференциал, причем φ играет роль силовой функции.

Обратно, если

$$a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = d\varphi(x, y, z),$$

то

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\operatorname{grad}\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть имеем какое-нибудь *центрированное* векторное поле (с центром O); это значит, что каждый вектор $\boldsymbol{a}(M)$ лежит на луче OM, причем длина и направление вектора $\boldsymbol{a}(M)$ зависят только от расстояния $\rho=OM$. Тогда

$$\boldsymbol{a}(M)=\frac{f(\rho)}{\rho}\boldsymbol{r},$$

где $f(\rho)$ — скалярная функция положительного аргумента ($|\boldsymbol{a}(M)|=|f(\rho)|$).

Имеем

$$a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$
$$=\frac{f(\rho)}{\rho}x\,dx+\frac{f(\rho)}{\rho}y\,dy+\frac{f(\rho)}{\rho}z\,dz=f(\rho)\,d\rho=dF(\rho),$$

где $F(\rho)=\int f(\rho)\,d\rho$, учитывая, что

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2;\qquad \rho\,d\rho=x\,dx+y\,dy+z\,dz.$$

Таким образом, центрированные векторные поля потенциальны.

Векторными линиями векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ называются такие кривые, которые в каждой своей точке M имеют направление вектора $\boldsymbol{a}(M)$. Эти линии определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}.$$

Если C — какой-нибудь замкнутый контур в пространстве, то векторные линии, проходящие через точки этого контура, образуют поверхность, называемую *векторной трубкой*.

§ 7. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим двусторонний кусок поверхности S, который можно разбить на конечное число частей, каждая из которых либо изобразима уравнением вида $z=f(x, y)$, либо является частью цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz.

Выберем на S определенную сторону.

Заметим, что не всякий кусок поверхности является двусторонним. Легко дать пример односторонней поверхности. Взяв прямоугольник $abcd$ (рис. 11) и склеив стороны ab и cd так, чтобы d совпало с b, c совпало с a, получим поверхность с одной стороной.

Пусть $R(x, y, z)$ — непрерывная функция на куске по-

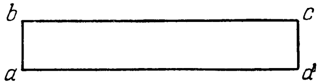


Рис. 11.

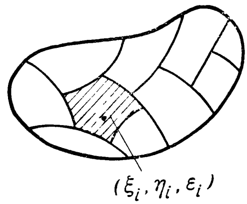


Рис. 12.

верхности S. Разобьем его (рис. 12) на части S_i, каждая из которых либо изобразима уравнением вида $z = f(x, y)$, либо принадлежит цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz. Возьмем на каждой части S_i точку (ξ_i, η_i, ζ_i).

Значение рассматриваемой функции в этой точке умножим на взятую с определенным знаком площадь проекции кусочка S_i на плоскость Oxy, причем берем знак $+$, если выбранная сторона поверхности на кусочке S_i обращена в сторону возрастания z, и знак $-$, если выбранная сторона поверхности на кусочке S_i обращена в сторону убывания z. Если S_i принадлежит цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, то вопрос о знаке отпадает, ибо площадь проекции равна нулю.

Эту площадь проекции S_i на Oxy с выбранным знаком обозначим $(S_i)_{xy}$. Теперь составим сумму упомянутых произведений

$$\sum_i R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{xy}.$$

Если наибольший из диаметров кусочков S_i стремится к нулю, то эта сумма стремится к определенному пределу, который называется *поверхностным интегралом* от $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S по переменным x, y и обозначается знаком $\iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy$. Аналогично определяются поверхностные интегралы по другим парам переменных (при аналогичных ограничениях, налагаемых на S). Таким образом,

$$\iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz = \lim \sum_i P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{yz}, \qquad (2.28)$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\,dz\,dx = \lim \sum_i Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{zx}, \qquad (2.29)$$

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \lim \sum_i R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{xy}. \qquad (2.30)$$

Далее вводим понятие комбинированного поверхностного интеграла

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint_S P\,dy\,dz + \iint_S Q\,dz\,dx + \iint_S R\,dx\,dy. \qquad (2.31)$$

Из определения поверхностного интеграла следует, что при перемене стороны поверхности интеграл лишь меняет свой знак; если кусок поверхности разбит на части, то интеграл по всему куску поверхности равен сумме интегралов по его частям; постоянные множители выносятся за знак интеграла, интеграл суммы равен сумме интегралов.

Из (2.30) видно, что $\iint_S R\,dx\,dy = 0$, если S есть кусок цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz (в этом случае проекции S_i на плоскость Oxy вырождаются в линии). Аналогично, из (2.28) и (2.29) видно, что $\iint_S P\,dy\,dz = 0$, если S есть кусок цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Ox; $\iint_S Q\,dz\,dx = 0$, если S есть кусок цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oy.

Преобразование поверхностного интеграла в обыкновенный двойной интеграл (частные случаи)

Пусть имеем поверхность $z = z(x, y)$. Пусть S — кусок рассматриваемой поверхности, A — его проекция на пло-

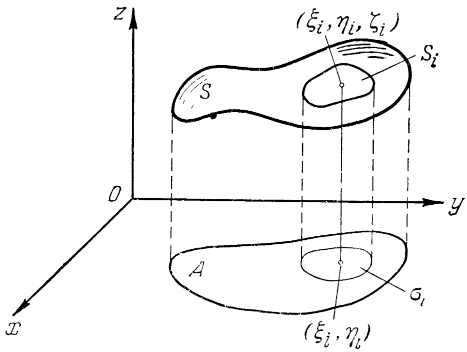


Рис. 13.

скость Oxy (рис. 13). Если на S выбрана сторона, обращенная в сторону возрастания z, то (рис. 13)

$$\sum_i R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{xy} = \sum_i R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)]\,\sigma_i,$$

откуда после перехода к пределу получаем:

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint_A R[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy.$$

Аналогичные формулы получаются для поверхностных интегралов по другим парам переменных. Итак,

$$\iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz = \iint_A P[x(y, z), y, z]\,dy\,dz \tag{2.32}$$

[где S — кусок поверхности $x = x(y, z)$ и A — его проекция на Oyz];

$$\iint_S Q(x, y, z)\,dz\,dx = \iint_A Q[x, y(z, x), z]\,dz\,dx \tag{2.33}$$

[где S — кусок поверхности $y=y(z, x)$ и A — его проекция на Ozx];

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy=\iint_A R[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy \tag{2.34}$$

[где S — кусок поверхности $z=z(x, y)$ и A — его проекция на Oxy].

Заметим, что вывод формул, выражающих поверхностный интеграл через обыкновенный двойной интеграл, дает одновременно доказательство существования поверхностного интеграла, если существование обыкновенного двойного интеграла считать известным

Преобразование поверхностного интеграла в обыкновенный двойной интеграл (общий прием)

Пусть S — кусок поверхности, заданный параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u, v)\\ y&=y(u, v)\\ z&=z(u, v)\end{aligned}\right\},$$

где (u, v) пробегает область Δ на плоскости Ouv (функции, стоящие в правых частях, предполагаются непрерывными вместе с их частными производными первого порядка).

Предположим сперва, что кусок S может быть представлен уравнением $z=f(x, y)$, где f — однозначная непрерывная функция, и пусть A — проекция S на плоскость Oxy. Тогда

$$z(u, v)=f[x(u, v), y(u, v)].$$

В силу (2.34) и правила замены переменных в двойном интеграле (если соответствие между Δ и A прямое, т. е. сохраняющее направления обходов)

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy=\iint_A R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint_\Delta R[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{2.34$'$}$$

Эта же формула верна, если S окажется куском цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, так как тогда обе части формулы равны нулю. Правая часть равна нулю вследствие того, что $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0$. Последнее равенство легко обнаружить. Пусть, например, уравнение названной цилиндрической поверхности есть $y = \varphi(x)$, тогда

$$y(u, v) = \varphi[x(u, v)],$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial u}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial v},$$

и, следовательно, в якобиане $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ строки пропорциональны.

В общем случае S можно разбить на части, подходящие под один из рассмотренных двух типов (мы ограничиваемся такими поверхностями S). Тогда Δ разобьется на соответствующие части. Применив к каждой из частей формулу (2.34′) и складывая полученные равенства, получим формулу (2.34′) для всего куска S.

Аналогичные формулы получаются для поверхностных интегралов по другим парам переменных. Итак,

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_\Delta P(x, y, z)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_S Q(x, y, z)\,dz\,dx = \iint\limits_\Delta Q(x, y, z)\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta R(x, y, z)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

откуда

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta \left[P\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \right.$$

$$\left. + Q\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]du\,dv = \iint\limits_\Delta \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv \qquad (2.35)$$

при надлежащем выборе стороны поверхности S.

Пусть, в частности, имеем кусок поверхности $z=f(x, y)$, где x, y пробегают область A плоскости Oxy. Тогда формула (2.35) дает (здесь x, y играют роль u, v):

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_A \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_A (-pP-qQ+R)\,dx\,dy, \qquad (2.36)$$

где $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$ и поверхностный интеграл берется по верхней стороне поверхности.

§ 8. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО

Эта формула преобразовывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности в тройной интеграл по области, ограниченной этой поверхностью.

Пусть D — замкнутая область, ограниченная замкнутой поверхностью S, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции с непрерывными частными производными первого порядка на D.

Сперва предположим, что D ограничена снизу поверхностью $z=z_1(x, y)$, сверху — поверхностью $z=z_2(x, y)$, с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, вырезающей на плоскости Oxy площадку A (рис. 14). Тогда S будет состоять из куска S_1 поверхности $z=z_1(x, y)$, куска S_2 поверхности $z=z_2(x, y)$, куска S_3 цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz. Имеем:

$$\iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_A dx\,dy\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz=$$

$$=\iint\limits_A [R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{S_2} R\,dx\,dy+\iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy,$$

где интегрирование происходит по нижней стороне S_1 и по верхней стороне S_2.

Добавляя $\iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy$ к правой части последнего равенства, мы не нарушим его, так как $\iint\limits_{S_3} R\,dx\,dy = 0$; следовательно,

$$\iiint\limits_{D} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} R\,dx\,dy, \tag{2.37}$$

где в правой части интегрирование происходит по внешней стороне замкнутой поверхности S.

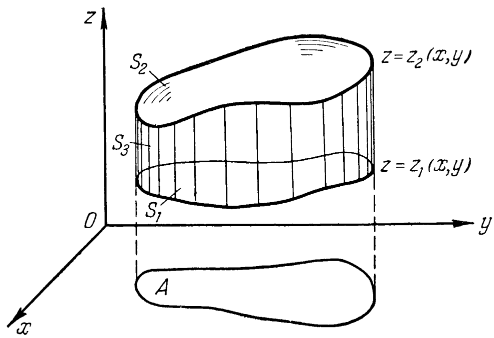


Рис. 14.

В общем случае D можно разбить на конечное число частей рассмотренного выше типа (мы ограничиваемся рассмотрением областей D, которые допускают такое разбиение). Применяя к каждой из частей формулу (2.37) и складывая полученные равенства, найдем, что (2.37) будет справедлива для рассматриваемой области (так как интегралы по перегородкам взаимно уничтожаются).

Меняя роли переменных, получим еще две аналогичные формулы:

$$\iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S P\, dy\, dz; \qquad (2.37')$$

$$\iiint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S Q\, dz\, dx. \qquad (2.37'')$$

Почленное сложение формул (2.37′), (2.37″), (2.37) дает нам искомую формулу Остроградского

$$\iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \qquad (2.38)$$

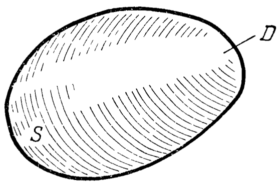


Рис. 15.

где D — ограниченная замкнутая область в пространстве (рис. 15), S — замкнутая поверхность, ограничивающая D, и P, Q, R — функции, непрерывные вместе с их частными производными первого порядка на D, причем в лěвой части формулы интегрирование происходит по внешней стороне поверхности S.

§ 9. ВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Поверхностный интеграл от вектор-функции

Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ — непрерывная вектор-функция на двустороннем куске поверхности S. При этом предполагается, что S имеет в каждой точке касательную плоскость, направление которой непрерывно зависит от точки поверхности (или же кусок S может быть разбит на конечное число таких частей). Выберем на S какую-нибудь сторону (рис. 16). Разобьем S на части; пусть площади этих частей будут S_i. На каждой части возьмем точку N_i и построим вектор $\boldsymbol{n}_i$, направленный по нормали в точке N_i к выбранной стороне поверхности и имеющий длину $|\boldsymbol{n}_i| = S_i$. Затем значение вектор-функции в точке N_i скалярно умножим на $\boldsymbol{n}_i$ и составим сумму таких скалярных произведений

$$\sum_i \boldsymbol{a}(N_i)\,\boldsymbol{n}_i.$$

Если наибольший из диаметров частей рассматриваемого куска поверхности стремится к нулю, то эта сумма стремится к определенному пределу, который называется поверхностным интегралом от $\boldsymbol{a}(M)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается знаком $\iint\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega}$ (здесь $d\boldsymbol{\omega}$ есть «ориентированный элемент поверхности»).

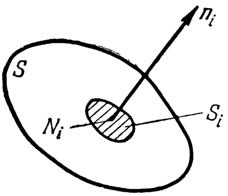


Рис. 16.

Поверхностный интеграл от вектор-функции легко выражается через обыкновенный поверхностный интеграл. Зададим систему координат. Пусть ξ_i, η_i, ζ_i — координаты N_i; тогда

$$\sum_i \boldsymbol{a}(N_i)\,\boldsymbol{n}_i = \sum_i [a_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\boldsymbol{n}_i)_x + a_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\boldsymbol{n}_i)_y + a_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\boldsymbol{n}_i)_z].$$

Но $(\boldsymbol{n}_i)_x$, $(\boldsymbol{n}_i)_y$, $(\boldsymbol{n}_i)_z$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равны соответственно $(S_i)_{yz}$, $(S_i)_{zx}$, $(S_i)_{xy}$; поэтому

$$\lim \sum_i \boldsymbol{a}(N_i)\,\boldsymbol{n}_i = \lim \sum_i [a_x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{yz} + a_y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{zx} + a_z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(S_i)_{xy}]$$

или

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega} = \iint\limits_S a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy. \qquad (2.39)$$

Одновременно мы получаем доказательство существования поверхностного интеграла от вектор-функции, считая, что существование обыкновенных поверхностных интегралов уже доказано.

Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ — векторное поле и S — кусок поверхности. Если это векторное поле рассматривать как поле скоростей потока жидкости, то через элементарную площадку S_i (рис. 17) в единицу времени вытечет столб жидкости, объем которого есть

$$S_i \boldsymbol{a}(N_i)_{n_i} = |\boldsymbol{n}_i|\,|\boldsymbol{a}(N_i)|\cos[\widehat{\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{a}}(N_i)] = \boldsymbol{a}(N_i)\,\boldsymbol{n}_i.$$

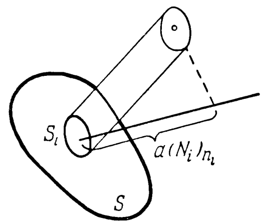


Рис. 17.

Следовательно, $\iint\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega}$ есть количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. По этой причине поверхностный интеграл $\iint\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega}$ называется *потоком векторного поля* через поверхность S.

Дивергенция векторного поля и векторная запись формулы Остроградского

Если S есть замкнутая поверхность, ограничивающая область D, то в силу (2.39) и (2.38) (интегрируя по внешней стороне поверхности) получим:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega} = \iint\limits_S a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \qquad (2.39')$$

Определение. *Дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке (x, y, z) называется скаляр $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, обозначаемый символом $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. Таким образом,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (2.40)$$

Вставляя этот символ в формулу (2.39′), получим:

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega} = \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\,dv. \tag{2.41}$$

Эта формула, являющаяся векторной записью формулы Остроградского, показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Точки, в которых дивергенция положительна, называются *источниками* (в этом случае поток векторного поля через малую замкнутую поверхность, окружающую такую точку, положителен). Точки, в которых дивергенция отрицательна, называются *стоками* (в этом случае поток векторного поля через малую замкнутую поверхность, окружающую такую точку, отрицателен).

Инвариантное определение дивергенции

Формула Остроградского позволяет дать инвариантное (независимое от системы координат) определение дивергенции векторного поля. С помощью теоремы о среднем для тройных интегралов находим:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim \frac{\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{\omega}}{V}, \tag{2.42}$$

где S — бесконечно малая поверхность, окружающая данную точку, V — объем области, ограниченной этой поверхностью.

Таким образом, дивергенция векторного поля в какой-нибудь точке равна отнесенному к единице объема потоку векторного поля через бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую данную точку.

Формальные свойства дивергенции

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторные поля, φ — скалярное поле. Тогда

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}; \tag{2.43}$$

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \varphi \boldsymbol{a}. \tag{2.44}$$

В самом деле,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\partial(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_x}{\partial x}+\ldots=\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}+\ldots$$

$$\ldots=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\ldots\right)+\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\ldots\right)=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b};$$

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\frac{\partial(\varphi\boldsymbol{a})_x}{\partial x}+\ldots=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}+\ldots=\varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\ldots\right)=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}\varphi\,\boldsymbol{a}.$$

Многоточия всюду обозначают, что следует вписать второе и третье слагаемые, аналогичные первому, получающиеся из него заменой x на y и z.

Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\boldsymbol{a}$, для которого тождественно $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$, называется *соленоидальным*.

Из (2.41) следует, что в случае соленоидального векторного поля поток векторного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Если взять векторную трубку (рис. 18), провести два сечения ее S_1 и S_2 и принять во внимание, что поток через боковую стенку всегда равен нулю, то приходим к такому заключению:

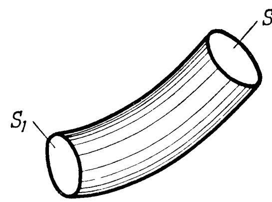


Рис. 18.

Если векторное поле соленоидально, то потоки векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой.

Пример. Рассмотрим какое-нибудь центрированное поле (см. пример в конце § 6) $\boldsymbol{a}(M)=\varphi(\rho)\boldsymbol{r}$, где $\varphi(\rho)=\frac{f(\rho)}{\rho}$. Тогда

$$\operatorname{div}(\varphi(\rho)\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(\rho)\boldsymbol{r})_x+\ldots=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(\rho)x)+\ldots=$$

$$=\left[\varphi'(\rho)\frac{x^2}{\rho}+\varphi(\rho)\right]+\ldots=\rho\varphi'(\rho)+3\varphi(\rho).$$

Отсюда заключаем, что центрированное поле $\varphi(\rho)\boldsymbol{r}$ соленоидально только тогда, когда функция $\varphi(\rho)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho\varphi'(\rho)+3\varphi(\rho)=0.$$

Разделив переменные, получим $\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}=-\frac{3}{\rho}$, откуда $\ln\varphi(\rho)=$ $=-3\ln\rho+\ln c$; $\varphi(\rho)=\frac{c}{\rho^3}$, следовательно, $f(\rho)=\frac{c}{\rho^2}$. Таким образом, центрированное векторное поле будет соленоидально только в том случае, когда длины векторов этого поля обратно пропорциональны квадратам расстояний точек приложения от центра.

§ 10. ФОРМУЛА СТОКСА

Эта формула преобразовывает криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую.

Пусть S — кусок поверхности, имеющий в каждой точке касательную плоскость, направление которой непрерывно зависит от точки поверхности, или могущий быть разбитым на конечное число таких частей. Замкнутая кривая C, ограничивающая S, предполагается имеющей в каждой точке касательную, направление которой непрерывно зависит от точки кривой (или же C состоит из конечного числа дуг, удовлетворяющих этому требованию). Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные во всех точках поверхности S (и точках, достаточно близких к S).

Пусть сперва кусок поверхности S может быть представлен уравнением $z=f(x, y)$. Пусть A — проекция S на плоскость Oxy, Γ — проекция C на плоскость Oxy (рис. 19). Если

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t), \end{aligned}\right\}\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

— параметрические уравнения Γ (пусть возрастанию t отвечает обход Γ в положительном направлении), то

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\\ z&=z(t), \end{aligned}\right\}\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

где $z(t)=f[x(t),\ y(t)]$ будут параметрическими уравнениями C.

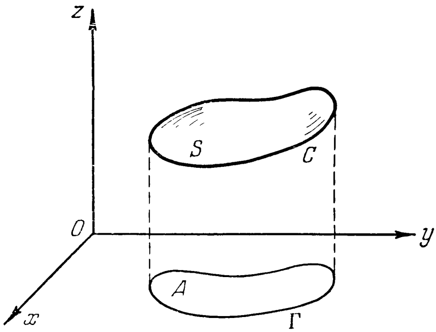


Рис. 19.

Полагая $\frac{\partial f}{\partial x}=p,\ \frac{\partial f}{\partial y}=q$ и используя правило преобразования криволинейного интеграла в простой интеграл, можем написать:

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\frac{dz}{dt}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\left(p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}\right)\right]dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[(P+pR)\frac{dx}{dt}+(Q+qR)\frac{dy}{dt}\right]dt=$$

$$=\oint\limits_\Gamma (P+pR)\,dx+(Q+qR)\,dy, \qquad (2.45')$$

причем в последнем интеграле P, Q, R следует понимать как

$$P[x,\ y,\ f(x,\ y)],\quad Q[x,\ y,\ f(x,\ y)],\quad R[x,\ y,\ f(x,\ y)],$$

т. е. как функции двух переменных x, y.

Формула Грина, преобразовывающая криволинейный интеграл по замкнутому контуру в двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром, дает:

$$\oint_{\Gamma} (P+pR)\,dx+(Q+qR)\,dy=$$

$$=\iint_{A} [(Q+qR)'_x-(P+pR)'_y]\,dx\,dy, \qquad (2.45'')$$

но (используем формулу полной производной и полагаем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=s$)

$$(Q+qR)'_x=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}p+sR+q\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}p\right),$$

$$(P+pR)'_y=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}q+sR+p\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}q\right),$$

откуда

$$(Q+qR)'_x-(P+pR)'_y=$$

$$=-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)p-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)q+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \quad (2.45''')$$

Из равенств (2.45′), (2.45″), (2.45‴) и формулы (2.36) (см. конец § 7) получаем искомую формулу Стокса:

$$\oint_{C} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

$$(2.45)$$

где направление обхода контура C берется положительным для выбранной стороны поверхности. Но эта формула доказана пока лишь для куска поверхности специального вида.

Меняя роли переменных, получим формулу (2.45) также для поверхностей S, изобразимых уравнением вида $x=f(y, z)$ или уравнением вида $y=f(z, x)$. В общем случае разобьем S на конечное число частей, каждая из которых изобразима либо уравнением вида $x=f(y, z)$, либо уравнением вида $y=f(z, x)$, либо уравнением вида $z=f(x, y)$ (мы ограничиваемся поверхностями S, которые могут быть разбиты таким образом). Применяя к каждой части формулу (2.45) и складывая полученные равенства (при этом интегралы по перегородкам взаимно уничтожатся), докажем справедливость формулы (2.45) для рассматриваемого куска поверхности. Теперь формула Стокса (2.45) доказана в общем виде.

§ 11. ВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ ФОРМУЛЫ СТОКСА. ВИХРЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ — векторное поле, S — кусок поверхности, C — контур, ограничивающий его. Имеем в силу (2.26) и (2.45):

$$\oint_C \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r} = \oint_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$
$$= \int_S\int \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy\right]. \quad (2.46')$$

Определение. *Вихрем* векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке x, y, z называется вектор

$$\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right),$$

обозначаемый знаком $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (а также символом $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$).

Из формулы (2.39) находим:

$$\int_S\int \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dz\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy =$$
$$= \int_S\int (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_x\,dy\,dz + (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_y\,dz\,dx + (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z\,dx\,dy =$$
$$= \int_S\int \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega}. \quad (2.46'')$$

Из (2.46′) и (2.46″) находим:

$$\oint_C \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{r} = \int_S\int \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega}, \quad (2.46)$$

причем направление обхода контура C берется положительным для выбранной стороны поверхности S. Формула (2.46) является векторной записью формулы Стокса и показывает, что циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура равна потоку вихря через поверхность, натянутую на этот контур.

Инвариантное определение вихря

Применяя формулу Стокса к бесконечно малой площадке, содержащей рассматриваемую точку, получим следующую инвариантную (независимую от координатной системы) характеристику вихря.

Проекция вихря на какое-нибудь направление равна отнесенной к единице площади циркуляции векторного поля вдоль контура бесконечно малой площадки, содержащей рассматриваемую точку и перпендикулярной к выбранному направлению.

Безвихревые векторные поля

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется *безвихревым*, если имеем тождественно $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$.

Из определения вихря видно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=0.$$

Но эти условия [см. формулы (2.27) в § 6], как мы знаем, необходимы и достаточны для потенциальности векторного поля.

Итак, для того чтобы векторное поле было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциальным.

Таким образом, понятие безвихревого векторного поля эквивалентно понятию потенциального векторного поля.

Так как поле градиентов какого-нибудь скалярного поля φ потенциально, то получаем тождество

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0. \tag{2.47}$$

Соленоидальность поля вихрей

Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ — какое-нибудь векторное поле; тогда его вихри образуют некоторое векторное поле $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Это есть поле вихрей данного векторного поля. Поле вихрей всегда соленоидально. В самом деле,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\,\partial z}=0.$$

Итак,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0. \tag{2.48}$$

Формальные свойства вихря

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторные поля, φ — скалярное поле. Тогда

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}; \tag{2.49}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{a}]. \tag{2.50}$$

В самом деле,

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_z}{\partial y}-\frac{\partial(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_y}{\partial z}\right)+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y}-\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right)+\ldots=\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\ldots\right]+$$

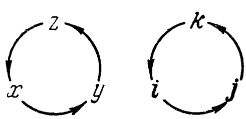
$$+\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)+\ldots\right]=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b};$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial(\varphi\boldsymbol{a})_z}{\partial y}-\frac{\partial(\varphi\boldsymbol{a})_y}{\partial z}\right)+\ldots=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial y}-\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial z}\right)+\ldots=$$

$$=\varphi\left\{\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\ldots\right\}+\left\{\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right)+\ldots\right\}=$$

$$=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{a}].$$

Многоточия всюду обозначают, что следует выписать второе и третье слагаемые, получающиеся из первого круговой перестановкой по схеме



§ 12. ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотренные выше три операции первого порядка

$$\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{a},\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{a},$$

переводящие соответственно скаляр в вектор, вектор в скаляр, вектор в вектор, порождают пять операций второго порядка:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a},\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a},$$

из которых две тождественно нулевые [см. формулы (2.47) и (2.48)]:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0,\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0.$$

Введем еще операцию второго порядка, называемую *оператором Лапласа*, для скалярного поля φ и векторного поля $\boldsymbol{a}$:

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$$\Delta\boldsymbol{a}=\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial z^2} \qquad (2.51)$$

($\Delta\varphi$ есть скаляр, $\Delta\boldsymbol{a}$ есть вектор). Очевидно,

$$\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,\Delta a_x+\boldsymbol{j}\,\Delta a_y+\boldsymbol{k}\,\Delta a_z.$$

Имеем:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad}\varphi)_x+\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad}\varphi)_y+\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad}\varphi)_z=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi. \qquad (2.52)$$

Имеем:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})=$$
$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\,\partial z}\right)+$$
$$+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right). \qquad (2.53)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_y\right]+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\right]+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta a_x\right)+\ldots=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}.$$

Многоточия всюду обозначают, что следует вписать второе и третье слагаемые, получающиеся из первого круговой передвижкой по схеме, показанной в конце § 11. Следовательно,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}. \tag{2.54}$$

§ 13. СИМВОЛИКА ГАМИЛЬТОНА

Введем символический вектор (набла)

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

и при выполнении действий по правилам, установленным для реальных скаляров и векторов, будем понимать под «произведениями» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на скаляр $\varphi(x, y, z)$ соответственно скаляры

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Тогда

$$\nabla\varphi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\operatorname{grad}\varphi$$

(здесь в левой части стоит произведение символического вектора на реальный скаляр);

$$\nabla\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z)=$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$$

7 Зак. 1944. П. И. Романовский

(здесь в левой части стоит скалярное произведение символического вектора на реальный вектор);

$$[\nabla \boldsymbol{a}] = \left[\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z)\right] =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$$

(здесь в левой части стоит векторное произведение символического вектора на реальный вектор).

Таким образом, три операции первого порядка, $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} a$, $\operatorname{rot} a$, могут быть единообразно записаны с помощью символического вектора набла:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\varphi &= \operatorname{grad} \varphi; \\ \nabla \boldsymbol{a} &= \operatorname{div} \boldsymbol{a}; \\ [\nabla \boldsymbol{a}] &= \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

Тогда для операций второго порядка получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\nabla\varphi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi; \\ [\nabla\nabla\varphi] &= \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi; \\ \nabla\nabla \boldsymbol{a} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}; \\ \nabla [\nabla \boldsymbol{a}] &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}; \\ [\nabla [\nabla \boldsymbol{a}]] &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

§ 14. ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Если каждой точке некоторой области пространства отнесена система трех чисел (u, v, w) так, что разным точкам отвечают разные системы (u, v, w), то мы скажем, что в рассматриваемой области пространства введены *криволинейные координаты* (u, v, w). Геометрические места точек, где $u = \text{const}$, или $v = \text{const}$, или $w = \text{const}$, назовем *координатными поверхностями*, пересечения двух координатных поверхностей — *координатными линиями*.

Введем, далее, в рассматриваемой области пространства прямоугольные координаты x, y, z.

Тогда между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами u, v, w точек рассматриваемой области пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие, описываемое формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v, w); \\ y &= y(u, v, w); \\ z &= z(u, v, w), \end{aligned}\right\} \qquad (2.57)$$

где функции, стоящие в правых частях, однозначны, а также формулами вида

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z); \\ v &= v(x, y, z); \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (2.58)$$

где функции, стоящие в правых частях, также однозначны.

Будем предполагать, что функции, стоящие в правых частях (2.57), непрерывны, имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ не обращается в нуль (тогда он сохраняет постоянный знак, будем предполагать его положительным). При этих условиях функции, стоящие в правых частях (2.58), будут обладать такими же свойствами. В случае надобности можно дополнительно потребовать, чтобы функции, стоящие в правых частях (2.57), имели частные производные порядка выше первого.

Дифференцируя по u тождество

$$u[x(u, v, w), \quad y(u, v, w), \quad z(u, v, w)] = u,$$

получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1. \qquad (2.59)$$

Аналогичные формулы справедливы для v и w.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты). Векторы $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$, очевидно, будут ненулевыми [ибо $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$]. Длины этих векторов

$$H_u = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|, \quad H_v = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|, \quad H_w = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|$$

называются *коэффициентами Ламе*; каждый из них является функцией от u, v, w.

Единичные векторы

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{H_u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}; \quad \boldsymbol{e}_v = \frac{1}{H_v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}; \quad \boldsymbol{e}_w = \frac{1}{H_w}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$$

также являются вектор-функциями от u, v, w.

Определение. Система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в каждой точке координатные линии попарно ортогональны.

Таким образом, ортогональность системы криволинейных координат обозначает, что в каждой точке векторы $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ попарно ортогональны или, что равносильно, в каждой точке попарно ортогональны векторы $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$.

Если криволинейные координаты введены лишь в некоторой части рассматриваемой области пространства, например в окрестности некоторой точки, то говорят о *локальной* системе криволинейных координат.

Градиент в ортогональных криволинейных координатах

Пусть φ — скалярное поле. Если ввести криволинейные координаты u, v, w, то φ станет функцией переменных u, v, w.

Введем прямоугольные координаты x, y, z. Известно (см. § 4), что

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

направлен по нормали к поверхности $u = \mathrm{const}$, и поэтому в случае ортогональных криволинейных координат $\operatorname{grad} u = h_u \boldsymbol{e}_u$, где h_u — некоторый скаляр; затем

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u} = H_u \boldsymbol{e}_u.$$

Скалярное перемножение равенств

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = h_u \boldsymbol{e}_u,$$

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u} = H_u \boldsymbol{e}_u$$

дает [если учесть формулу (2.59)]:

$$1 = h_u H_u,$$

откуда $h_u = \frac{1}{H_u}$, следовательно, $\operatorname{grad} u = \frac{e_u}{H_u}$. Аналогично $\operatorname{grad} v = \frac{e_v}{H_v}$, $\operatorname{grad} w = \frac{e_w}{H_w}$.

Формула градиента сложной функции (2.17) дает:

$$\operatorname{grad} \varphi(u, v, w) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \operatorname{grad} v + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \operatorname{grad} w.$$

Изложенное показывает, что градиент скалярного поля в ортогональных криволинейных координатах определяется формулой

$$\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{e}_u \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H_u} + \boldsymbol{e}_v \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H_v} + \boldsymbol{e}_w \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{H_w}. \tag{2.60}$$

Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах

Пусть $\boldsymbol{a}$ — векторное поле. Если ввести криволинейные координаты u, v, w, то $\boldsymbol{a}$ станет вектор-функцией переменных u, v, w. Систему криволинейных координат будем предполагать ортогональной.

Воспользуемся инвариантностью определения дивергенции (2.42) в произвольно взятой точке (u_0, v_0, w_0), беря в качестве замкнутой поверхности S оболочку криволинейного параллелепипеда D (рис. 20), ограниченного поверхностями

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0;$$
$$u = u_0 + \Delta u_0, \quad v = v_0 + \Delta v_0,$$
$$w = w_0 + \Delta w_0,$$

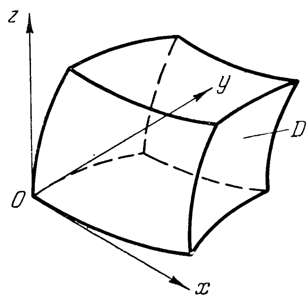


Рис. 20.

где Δu_0, Δv_0, Δw_0 стремятся к нулю.

Введем прямоугольные координаты, поместив начало O в точке (u_0, v_0, w_0) и направив координатные оси по $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ для этой точки. Тогда (если H_{u0}, H_{v0}, H_{w0} — значения коэффициентов Ламе для этой точки) имеем:

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right)_0 = \begin{vmatrix} H_{u0} & 0 & 0 \\ 0 & H_{v0} & 0 \\ 0 & 0 & H_{w0} \end{vmatrix} = H_{u0}H_{v0}H_{w0},$$

$$V = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u_0}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v_0}\int\limits_{w_0}^{w_0+\Delta w_0} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\,du\,dv\,dw =$$

$$= H_{u0}H_{v0}H_{w0}\,\Delta u_0\,\Delta v_0\,\Delta w_0 + \varepsilon\,\Delta u_0\,\Delta v_0\,\Delta w_0,$$

где ε стремится к нулю вместе с Δu_0, Δv_0, Δw_0. Затем (учитывая формулу 2.35),

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega} = \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v_0}\int\limits_{w_0}^{w_0+\Delta w_0}\left[\left(\boldsymbol{a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right)_{(u_0+\Delta u_0,\, v,\, w)} -\right.$$

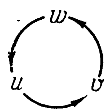
$$\left.-\left(\boldsymbol{a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right)_{(u_0,\, v,\, w)}\right] dv\,dw + \ldots =$$

$$= \left\{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\boldsymbol{a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right)\right]_{(u_0,\, v_0,\, w_0)} + \ldots\right\}\Delta u_0\,\Delta v_0\,\Delta w_0 +$$

$$+ \varepsilon'\,\Delta u_0\,\Delta v_0\,\Delta w_0,$$

где ε' стремится к нулю вместе с Δu_0, Δv_0, Δw_0.

Многоточие обозначает, что следует написать еще два слагаемых, получающихся из первого путем круговой перестановки букв по схеме



Следовательно, при стремлении Δu_0, Δv_0, Δw_0 к нулю

$$\lim \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,d\omega}{V} = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\boldsymbol{a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right)\right]_{(u_0,\, v_0,\, w_0)} + \ldots}{H_{u_0}H_{v_0}H_{w_0}},$$

но

$$\left(\boldsymbol{a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right) = \begin{vmatrix} a_u & a_v & a_w \\ 0 & H_v & 0 \\ 0 & 0 & H_w \end{vmatrix} = a_u H_v H_w$$

и, таким образом,

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_0 = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w)\right]_{(u_0,\, v_0,\, w_0)} + \ldots}{H_{u0} H_{v0} H_{w0}}.$$

Изложенное показывает, что дивергенция векторного поля в ортогональных криволинейных координатах определяется формулой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_w H_u) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v)}{H_u H_v H_w}. \quad (2.61)$$

Вихрь в ортогональных криволинейных координатах

Пусть $\boldsymbol{a}$ — векторное поле. Если ввести криволинейные координаты u, v, w, то $\boldsymbol{a}$ станет вектор-функцией переменных u, v, w. Систему криволинейных координат будем предполагать ортогональной.

Воспользуемся инвариантным определением вихря (см. § 11) в произвольно взятой точке (u_0, v_0, w_0). Пусть S — криволинейный четырехугольный кусок координатной поверхности $w = w_0$, ограниченный линиями

$$u = u_0, \qquad v = v_0;$$
$$u = u_0 + \Delta u_0, \quad v = v_0 + \Delta v_0;$$

и пусть C — контур S (рис. 21).

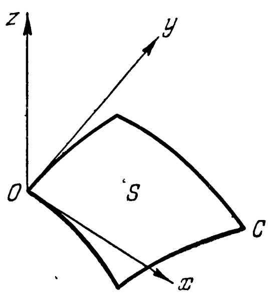


Рис. 21.

Введем прямоугольные координаты, поместив начало O в точке (u_0, v_0, w_0) и направив координатные оси по $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ для этой точки.

Имеем:

$$\oint\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u_0} \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)_{(u,\, v_0,\, w_0)} du + \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v_0} \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)_{(u_0+\Delta u_0,\, v,\, w_0)} dv +$$

$$+ \int\limits_{u_0+\Delta u_0}^{u_0} \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)_{(u,\, v_0+\Delta v_0,\, w_0)} du + \int\limits_{v_0+\Delta v_0}^{v_0} \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)_{(u_0,\, v,\, w_0)} dv =$$

$$= \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v_0} \left[\left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)_{(u_0+\Delta u_0,\, v,\, w_0)} - \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)_{(u_0,\, v,\, w_0)}\right] dv -$$

$$- \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u_0} \left[\left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)_{(u,\, v_0+\Delta v_0,\, w_0)} - \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)_{(u,\, v_0,\, w_0)}\right] du =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)\right]_{(u_0,\, v_0,\, w_0)} \Delta u_0\, \Delta v_0 + \varepsilon\, \Delta u_0\, \Delta v_0,$$

где ε стремится к нулю вместе с Δu_0, Δv_0.

Затем, если A—проекция S на плоскость Oxy и γ—угол нормали с Oz, то

$$\text{пл. } S = \iint\limits_A \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u_0} \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v_0} \frac{\frac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)}}{\cos\gamma}\, du\, dv =$$

$$= H_{u0} H_{v0}\, \Delta u_0\, \Delta v_0 + \varepsilon' \Delta u_0\, \Delta v_0,$$

где ε' стремится к нулю вместе с Δu_0, Δv_0, ибо

$$\left(\frac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)}\right)_0 = \begin{vmatrix} H_{u0} & 0 \\ 0 & H_{v0} \end{vmatrix} = H_{u0} H_{v0},$$

$(\cos\gamma)_0 = 1$.

Следовательно, при стремлении Δu_0, Δv_0 к нулю

$$\lim \frac{\int\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}}{\text{пл. } S} = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)\right]_{(u_0,\, v_0,\, w_0)}}{H_{u0} H_{v0}}.$$

Но

$$\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (\boldsymbol{e}_u a_u + \boldsymbol{e}_v a_v + \boldsymbol{e}_w a_w)\, \boldsymbol{e}_v H_v = a_v H_v$$

и аналогично $\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=a_u H_u$. Таким образом (см. § 11), имеем:

$$[(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_0]_z=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_v H_v)-\frac{\partial}{\partial v}(a_u H_u)\right]_{(u,\ v_0,\ w_0)}}{H_{u0}H_{v0}}$$

и аналогичные формулы получаются для $[(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_0]_x$, $[(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_0]_y$.

Изложенное показывает, что вихрь векторного поля в ортогональных криволинейных координатах определяется формулой

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_u\frac{\frac{\partial}{\partial v}(a_w H_w)-\frac{\partial}{\partial w}(a_v H_v)}{H_v H_w}+$$
$$+\boldsymbol{e}_v\frac{\frac{\partial}{\partial w}(a_u H_u)-\frac{\partial}{\partial u}(a_w H_w)}{H_w H_u}+\boldsymbol{e}_w\frac{\frac{\partial}{\partial u}(a_v H_v)-\frac{\partial}{\partial v}(a_u H_u)}{H_u H_v}. \qquad (2.62)$$

Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах

Пусть φ — скалярное поле. Если ввести криволинейные координаты u, v, w, то φ станет функцией переменных u, v, w. Систему криволинейных координат будем предполагать ортогональной.

Согласно формуле (2.52) имеем:

$$\Delta\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — оператор Лапласа, поэтому, пользуясь формулами (2.60) и (2.61), найдем, что оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах определяется формулой

$$\Delta\varphi=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_w H_u}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)}{H_u H_v H_w}, \qquad (2.63)$$

которую, очевидно, можно переписать в виде

$$\Delta\varphi=\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}}{H_u^2}+\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{H_v^2}+\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}}{H_w^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{1}{H_u^2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{H_v H_w}{H_u}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{1}{H_v^2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{H_w H_u}{H_v}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{1}{H_w^2}\frac{\partial}{\partial w}\ln\frac{H_u H_v}{H_w}. \qquad (2.63')$$

Векторные операции в цилиндрических координатах

Перейдем от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим r, φ, z по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

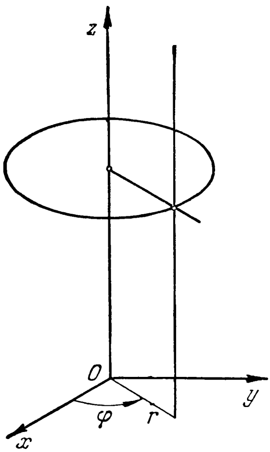


Рис. 22.

(здесь r, φ, z выполняют роль u, v, w).

Координатными линиями будут лучи с начальными точками на оси Oz и перпендикулярные к Oz, окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к Oz, с центрами на оси Oz, прямые, параллельные оси Oz (рис. 22).

Цилиндрическая система координат, очевидно, ортогональная. Коэффициентами Ламе в рассматриваемом случае будут:

$$H_r = 1; \quad H_\varphi = r; \quad H_z = 1.$$

Пусть f — скалярное поле, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле. Из формул (2.60), (2.61), (2.62), (2.63′) получим выражения для градиента, дивергенции, вихря и оператора Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{r} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}; \tag{2.64}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{a_r}{r} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \tag{2.65}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial a_r}{\partial_z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) +$$

$$+ \boldsymbol{e}_z\left(\frac{a_\varphi}{r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right), \tag{2.66}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{2.67}$$

Векторные операции в сферических координатах

Перейдем от прямоугольных координат x, y, z к сферическим r, φ, θ по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi, \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

(здесь r, φ, θ выполняют роль u, v, w).

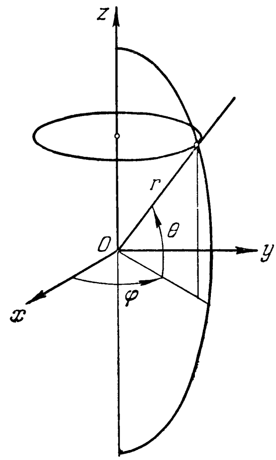


Рис. 23.

Координатными линиями будут лучи, выходящие из начала, окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к Oz, с центрами на оси Oz, полуокружности с центрами в начале и диаметрами на оси Oz (рис. 23).

Сферическая система координат, очевидно, ортогональная. Коэффициентами Ламе в рассматриваемом случае будут:

$$H_r = 1; \quad H_\varphi = r\cos\theta; \quad H_\theta = r.$$

Пусть f — скалярное поле, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле. Из формул (2.60), (2.61), (2.62), (2.63) получим выражения для градиента, дивергенции, вихря и оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{r\cos\theta} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\frac{\partial f}{\partial \theta}}{r}, \tag{2.68}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial (a_\theta\cos\theta)}{\partial \theta}, \tag{2.69}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial (a_\varphi\cos\theta)}{\partial \theta}\right) +$$
$$+ \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r}\right) + \boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right), \tag{2.70}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right). \tag{2.71}$$

ГЛАВА III

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Если комплексному числу $z = x + iy$ отнести точку на плоскости с прямоугольными координатами (x, y), то между комплексными числами и точками плоскости (назовем ее плоскостью комплексного переменного) установится взаимно однозначное соответствие.

Если комплексное число z — *действительное* (т. е. $y = 0$, тогда $z = x$), то соответствующая точка лежит на оси абсцисс, и наоборот. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*. Если комплексное число z — *мнимое* (т. е. $y \neq 0$), то соответствующая точка лежит вне оси абсцисс, и наоборот. Если комплексное число z — *чисто мнимое* (т. е. $x = 0$, $y \neq 0$, тогда $z = iy$), то соответствующая точка лежит на оси ординат, и наоборот (за исключением начала координат). Поэтому ось ординат называют *мнимой осью*.

Полярные координаты (r, φ) точки, изображающей рассматриваемое комплексное число z (если взять полюс в начале координат и направить полярную ось по оси абсцисс), называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и обозначаются соответственно $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$. Очевидно, $|z| \geqslant 0$, причем равно нулю только при $z = 0$. При $z \neq 0$ $\operatorname{Arg} z$ имеет бесконечно много значений, получающихся из какого-нибудь одного $\arg z$ по формуле

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ — произвольное целое число}).$$

При $z = 0$ $\operatorname{Arg} z$ не определен.

Формулы, связывающие прямоугольные координаты с полярными, показывают, что

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{Arg} z=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

(причем, в последней формуле, очевидно, пригодны не все значения арктангенса). Из $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ находим:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. Обратно, если комплексное число z записано в форме (3.1), где r, φ действительны, причем r неотрицательно, то r будет модулем, а φ — одним из аргументов числа z.

Если каждой точке M плоскости комплексного переменного отнести вектор $\overrightarrow{OM}$, то появится возможность представлять комплексные числа векторами.

Сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов. Отсюда следует, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{3.2}$$

откуда, по индукции, для любых комплексных чисел z_1, z_2, ..., z_n

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|. \tag{3.2'}$$

Из (3.2) следует, что

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|, \tag{3.3}$$

ибо из $z_1=(z_1-z_2)+z_2$ по (3.2) находим $|z_1|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$, откуда следует (3.3). Заметим, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа.

При умножении комплексных чисел модули перемножаются, аргументы складываются. В самом деле, пользуясь тригонометрической формой комплексных чисел, найдем:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1); \qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2);$$
$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+$$
$$+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Отсюда следует, что при делении комплексных чисел модули делятся, аргументы вычитаются.

Из правила умножения комплексных чисел следует, что при возведении в степень с целым положительным показателем n модуль возводится в n-ю степень, аргумент умножается на n. Это приводит к *формуле Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3.4}$$

Раскрывая левую часть (3.4) по формуле бинома Ньютона и отделяя действительную часть от мнимой, получим формулы для косинуса и синуса кратных углов:

$$\left.\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots, \\ \sin n\varphi &= n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.4'}$$

Тригонометрическая форма комплексных чисел приводит к простому правилу извлечения корней из комплексных чисел. Корень n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет n значений. Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

есть рассматриваемое комплексное число и

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

есть какой-нибудь корень n-й степени из него (т. е. число, удовлетворяющее равенству $w^n = z$). Тогда

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

откуда $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, где k — некоторое целое число. Следовательно,

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Обратно, при всяком целом k последнее выражение является корнем n-й степени из z (ибо n-я степень его равна z). Но упомянутые выражения для двух значений k будут различными комплексными числами лишь в случае, когда эти значения k отличаются на число, не кратное n. Отсюда следует, что, давая k значения 0, 1, 2, ..., $n-1$, мы получим все значения $\sqrt[n]{z}$ и, таким образом, видим, что число этих значений равно n. Все значения $\sqrt[n]{z}$ определяются формулой

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \tag{3.5}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Соответствующие им точки лежат на одной окружности с центром в точке 0 и делят ее на n равных частей. Следовательно, точки, изображающие значения корня n-й степени из комплексного числа, являются вершинами правильного n-угольника с центром 0.

В частности, при $z=1$ (тогда $r=1$, $\varphi=0$) получим:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{3.5$'$}$$

Пусть $z=x+iy$; тогда комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется *сопряженным* для z. Точки, соответствующие z и $\bar{z}$, симметричны относительно действительной оси. Очевидно, что комплексное число совпадает со своим сопряженным только тогда, когда оно действительное. Непосредственно проверяется, что сопряженные суммы, разности, произведения, частного равны соответственно сумме, разности, произведению, частному сопряженных, т. е.

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2;\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2;\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2;$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Заметим еще, что $z\bar{z}=|z|^2$.

§ 2. РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Пусть имеем бесконечную последовательность комплексных чисел

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots, \tag{3.6}$$

где $z_n=x_n+iy_n$. Число $z=x+iy$ называется *пределом* этой последовательности, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь $|z_n - z| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $z_n \to z$ или $\lim z_n = z$. Геометрически это означает, что для всякого круга с центром z все члены последовательности, начиная с некоторого, лежат внутри этого круга. Последовательность комплексных чисел не может иметь двух пределов, следовательно, либо имеет один предел (тогда называется *сходящейся*), либо не имеет предела (тогда называется *расходящейся*).

Для сходимости последовательности чисел $z_n = x_n + iy_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательность чисел x_n и последовательность чисел y_n.

В самом деле, если последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к $z = x + iy$, то при $n > N$ имеем $|z_n - z| < \varepsilon$; но тогда подавно $|x_n - x| < \varepsilon$, $|y_n - y| < \varepsilon$ и, следовательно, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Обратно, если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то при $n > N_1$ имеем $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, при $n > N_2$ имеем $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, поэтому при $n > N$ (где N — наибольшее из N_1 и N_2)

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon,$$

следовательно, $z_n \to z$.

Критерий Коши. Для сходимости последовательности комплексных чисел z_n необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер N, что при $n > N$ и $p > 0$ имели бы

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

Этот критерий может быть доказан прямым путем, но его можно получить из критерия Коши для последовательностей действительных чисел (считая, что для них он был уже доказан). В самом деле, если для z_n выполнено требование критерия Коши, то оно выполнено и для x_n и y_n, так как

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|, \quad |y_{n+p} - y_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|.$$

Обратно, если требование критерия Коши выполнено для x_n и для y_n, то из $|z_{n+p} - z_n| = \sqrt{(x_{n+p} - x_n)^2 + (y_{n+p} - y_n)^2}$ сразу усматриваем его выполнимость для z_n.

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \tag{3.7}$$

где $w_n = u_n + iv_n$.

Ряд (3.7) называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $S_n = w_1 + \ldots + w_n$ сходится. Тогда ее предел S называют *суммой* ряда (3.7) и пишут $S = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$. В противном случае ряд (3.7) называется *расходящимся*. Из доказанного выше предложения для последовательностей непосредственно следует: для сходимости ряда с комплексными членами $\sum w_n$, где $w_n = u_n + iv_n$, необходимо и достаточно, чтобы ряды с действительными членами $\sum u_n$ и $\sum v_n$ были сходящимися.

Из критерия Коши для последовательностей комплексных чисел непосредственно вытекает критерий Коши для рядов с комплексными членами: для сходимости ряда $\sum w_n$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер N, что при $n > N$ и $p > 0$ имели бы

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \ldots + w_{n+p}| < \varepsilon.$$

В самом деле, достаточно лишь заметить, что

$$S_{n+p} - S_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \ldots + w_{n+p}.$$

Ряд с комплексными членами $\sum w_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum |w_n|$ сходится. Из критерия Коши сразу следует, что абсолютно сходящийся ряд сходится. Для абсолютной сходимости $\sum w_n$, где $w_n = u_n + iv_n$, очевидно необходима и достаточна абсолютная сходимость рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$, ибо

$$\left.\begin{matrix} |u_n| \\ |v_n| \end{matrix}\right\} \leqslant |w_n| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

Если ряд $\sum w_n$ абсолютно сходится, то при любой перестановке членов факт абсолютной сходимости и величина суммы не меняются. Это следует из последнего замечания, если считать, что для рядов с действительными членами теорема уже известна.

В абсолютно сходящихся рядах с комплексными членами разрешается любая группировка членов (в одну группу может попадать как конечное, так и бесконечное число членов). Этот факт можно установить прямым путем, но он получается как следствие, если для абсолютно сходящихся рядов с действительными членами его считать известным.

Абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами можно почленно перемножать. Это можно доказать прямым путем, но этот факт получается сразу, если считать его уже установленным для рядов с действительными членами. В самом деле, пусть $\sum w_n$ и $\sum w'_n$ абсолютно сходятся, $w_n = u_n + iv_n$; $w'_n = u'_n + iv'_n$. Тогда $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum u'_n$, $\sum v'_n$ абсолютно сходятся и затем

$$\begin{aligned}\sum_k w_k \sum_l w'_l &= (\sum_k u_k + i\sum_k v_k)(\sum_l u'_l + i\sum_l v'_l) = \\ &= \sum_k u_k \sum_l u'_l - \sum_k v_k \sum_l v'_l + i(\sum_k u_k \sum_l v'_l + \sum_k v_k \sum_l u'_l) = \\ &= \sum_{k,l} u_k u'_l - \sum_{k,l} v_k v'_l + i(\sum_{k,l} u_k v'_l + \sum_{k,l} v_k u'_l) = \\ &= \sum_{k,l} [u_k u'_l - v_k v'_l + i(u_k v'_l + v_k u'_l)] = \sum_{k,l} w_k w'_l.\end{aligned}$$

§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.8}$$

где a_n — любые комплексные числа, z — комплексное переменное.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится для некоторого значения переменного, то он абсолютно сходится для всех значений переменного с меньшим модулем.

Это значит, что если $\sum a_n z_0^n$ сходится, $|z| < |z_0|$, то $\sum a_n z^n$ абсолютно сходится.

Доказательство. Так как ряд $\sum a_n z_0^n$ сходится, то его члены стремятся к нулю и, следовательно, ограничены, т. е. найдется такое число K, что для всех n

$$|a_n z_0^n| < K.$$

Если $|z| < |z_0|$, то число $q = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$ и

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| = |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n < Kq^n.$$

Но числа Kq^n образуют убывающую геометрическую прогрессию, значит, ряд $\sum Kq^n$ сходится, но тогда на основании принципа сравнения рядов с неотрицательными членами ряд $\sum |a_n z^n|$ сходится, следовательно, ряд $\sum a_n z^n$ абсолютно сходится, что и требовалось доказать.

Следствие. Если степенной ряд расходится (или неабсолютно сходится) для некоторого значения переменного, то он расходится для всех значений переменного с бо́льшим модулем.

Это значит, что если $\sum a_n z_0^n$ расходится или неабсолютно сходится, $|z| > |z_0|$, то $\sum a_n z^n$ расходится.

В самом деле, если бы ряд $\sum a_n z^n$ сходился, то по теореме Абеля (так как $|z_0| < |z|$) ряд $\sum a_n z_0^n$ был бы абсолютно сходящимся, что противоречит условию.

Область сходимости степенного ряда

Рассмотрим какой-нибудь ряд, члены которого зависят от z. Те значения z, для которых рассматриваемый ряд сходится, называются *точками сходимости* его; те значения z, для которых рассматриваемый ряд расходится, называются *точками расходимости* его. Совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* рассматриваемого ряда.

Теорема Абеля позволит решить вопрос об области сходимости степенного ряда.

Пусть $\sum a_n z^n$ — какой-нибудь степенной ряд. Логически возможны следующие три случая:

1) все положительные числа суть точки сходимости;

2) все положительные числа суть точки расходимости;

3) существуют положительные точки сходимости и положительные точки расходимости.

В первом случае в силу теоремы Абеля данный степенной ряд сходится (абсолютно) для всех значений z (так как для любого комплексного числа z найдется положительное число большее, чем $|z|$). Следовательно, область сходимости есть вся плоскость комплексного переменного.

Во втором случае в силу следствия из теоремы Абеля данный степенной ряд расходится для всех значений $z \neq 0$ (так как для любого комплексного числа $z \neq 0$ найдется положительное число меньшее, чем $|z|$). Следовательно, область сходимости состоит из одной точки 0.

В третьем случае найдется положительная точка сходимости r_1 и положительная точка расходимости R_1. Если $\frac{r_1+R_1}{2}$ есть точка сходимости, то положим $r_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$, $R_2 = R_1$; если же $\frac{r_1+R_1}{2}$ есть точка расходимости, то положим $r_2 = r_1$, $R_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$. Таким же образом, исходя из r_2, R_2 введем числа r_3, R_3 и т. д. В результате получим неубывающую последовательность положительных точек сходимости

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$$

и невозрастающую последовательность положительных точек расходимости

$$R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3 \geqslant \ldots,$$

причем $R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0$. Следовательно, обе названные последовательности имеют общий предел

$$\lim r_n = \lim R_n = R.$$

Если $|z| < R$, то при достаточно большом n $|z| < r_n$ и, следовательно, в силу теоремы Абеля z есть точка сходимости. Если $|z| > R$, то при достаточно большом n $|z| > R_n$ и, следовательно, в силу следствия из теоремы Абеля, z есть точка расходимости. Таким образом, внутри круга радиуса R с центром 0 ряд сходится (абсолютно), вне этого круга ряд расходится. Вопрос о точках, лежащих на окружности, остается открытым. Область сходимости степенного ряда есть, таким образом, круг радиуса R с центром 0 (точнее, внутренность этого круга плюс, быть может, некоторое множество точек окружности). Этот круг называется *кругом сходимости*. Радиус его называется *радиусом сходимости*.

В первом и втором случаях следует считать соответственно $R=\infty$ и $R=0$ (круг сходимости соответственно обращается во всю плоскость или вырождается в точку).

Во всех точках *внутри* круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится.

Если в некоторой точке на окружности круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится, то он сходится абсолютно во всех точках окружности круга сходимости (ибо модули членов степенного ряда для всех точек этой окружности соответственно одинаковы).

Если в некоторой точке на окружности круга сходимости степенной ряд либо неабсолютно сходится, либо расходится, то в каждой точке этой окружности он либо неабсолютно сходится, либо расходится.

Рассмотрим теперь ряд

$$b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots+\frac{b_n}{z^n}+\ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{z^n}. \tag{3.8'}$$

Полагая $\zeta=\frac{1}{z}$, превратим этот ряд в степенной ряд $\sum\limits_0^\infty b_n\zeta^n$ с некоторым радиусом сходимости ρ. Тогда при $|\zeta|<\rho$ ряд сходится, при $|\zeta|>\rho$ расходится. Следовательно, ряд (3.8′) при $|z|>\frac{1}{\rho}$ сходится, при $|z|<\frac{1}{\rho}$ расходится. Полагая $r=\frac{1}{\rho}$, найдем, что область сходимости ряда (3.8′) есть «внешность» круга (рис. 24) радиуса r с центром 0 (точнее, внешность этого круга, плюс, быть может, некоторое множество точек окружности). Сходимость ряда (3.8′) во всех точках вне упомянутого круга — абсолютная.

Рассмотрим теперь ряд, бесконечный в обе стороны,

$$\ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{3.8''}$$

или

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Ряд, бесконечный в обе стороны, считается сходящимся, если сходится ряд, составленный из членов, лежащих правее некоторого члена, и ряд, составленный из членов, лежащих левее некоторого члена (очевидно, нет надобности

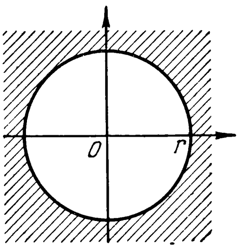


Рис. 24.

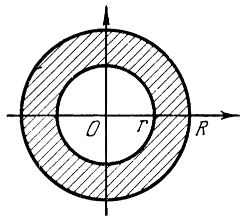


Рис. 25.

указывать номер этого некоторого члена, так как при другом выборе его упомянутые два ряда изменятся на конечное число членов и, следовательно, их поведение не изменится). Таким образом, ряд (3.8″) сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся оба ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n;$$

$$\frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \left(\text{или} \sum_{-\infty}^{-1} a_n z^n \right).$$

Область сходимости первого из этих рядов есть внутренность некоторого круга радиуса R с центром 0. Область сходимости второго ряда есть внешность некоторого круга радиуса r с центром 0. Если $r < R$, то общая часть упомянутых областей сходимости есть кольцо с центром 0 (рис. 25). В этом случае область сходимости ряда (3.8″)

есть кольцо, ограниченное двумя окружностями с центром 0 (плюс, быть может, некоторое множество точек, лежащих на ограничивающих окружностях). Это кольцо называется *кольцом сходимости* ряда (3.8″). Внутри кольца сходимости сходимость ряда (3.8″) — абсолютная. Если $r > R$, то ряд (3.8″) не имеет точек сходимости, если $r = R$, то ряд (3.8″) может иметь точки сходимости только на окружности радиуса $r = R$.

Рассмотрим степенной ряд

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots + \\ + A_n(z-a)^n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z-a)^n. \qquad (3.8''')$$

Полагая $\zeta = z - a$, превратим этот ряд в ряд $\sum\limits_0^\infty A_n\zeta^n$ с некоторым радиусом сходимости R. Возвращаясь к переменному z, найдем, что область сходимости ряда (3.8‴) есть круг (рис. 26) радиуса R с центром a (точнее, внутренность этого круга плюс, быть может, некоторое множество точек окружности). Этот круг называется *кругом сходимости* ряда (3.8‴), его радиус — *радиусом сходимости* (при $R = +\infty$ получаем всю плоскость, при $R = 0$ круг вырождается в точку a). Внутри круга сходимость ряда (3.8‴) — абсолютная.

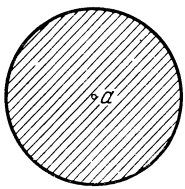


Рис. 26.

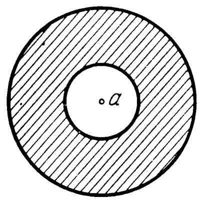


Рис. 27.

Рассмотрим ряд

$$\ldots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \ldots \\ \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n. \qquad (3.8'''')$$

Полагая $\zeta = z - a$, превратим этот ряд в ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_n\zeta^n$. Если он имеет кольцо сходимости $r < |\zeta| < R$, то область сходимости ряда (3.8⁗) будет кольцом, ограниченным окружностями радиусов r и R с центром a (рис. 27). Это кольцо называется *кольцом сходимости* ряда (3.8‴). Внутри этого кольца сходимость ряда (3.8‴) — абсолютная.

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для любого комплексного числа z определим функции

$$e^z, \quad \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh} z, \quad \cos z, \quad \sin z$$

как суммы тех степенных рядов, в которые разлагались эти функции, когда переменное z было действительным. Так как соответствующие степенные ряды были сходящимися на всей числовой прямой, то (в силу теоремы Абеля) они будут сходиться на всей плоскости комплексного переменного. Таким образом, полагаем *по определению* для любого комплексного z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; \tag{3.9}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \tag{3.10}$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \tag{3.11}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \tag{3.12}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.13}$$

Из этого определения видно, что для действительных значений z эти функции получают уже известные значения. Затем видно, что $\operatorname{ch} z$, $\cos z$ — четные [т. е. обладающие свойством $f(-z) = f(z)$], $\operatorname{sh} z$, $\sin z$ — нечетные [т. е. обладающие свойством $f(-z) = -f(z)$].

Формулы Эйлера

При любом комплексном z в силу (3.9), (3.12), (3.13) имеем

$$e^{iz}=1+iz+\frac{i^2z^2}{2!}+\frac{i^3z^3}{3!}+\frac{i^4z^4}{4!}+\frac{i^5z^5}{5!}+\ldots=$$
$$=1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=$$
$$=\cos z+i\sin z,$$

учитывая, что в абсолютно сходящемся ряде допустима любая группировка членов.

Таким образом, получаем формулу Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{3.14}$$

Заменяя z на $-z$, получим:

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z.$$

Почленное сложение и вычитание двух последних равенств дает:

$$e^{iz}+e^{-iz}=2\cos z;\quad e^{iz}-e^{-iz}=2i\sin z,$$

откуда

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{3.14'}$$

Эти формулы также называются формулами Эйлера.

С помощью формулы Эйлера (3.14) тригонометрическая форма комплексного числа (3.1) принимает вид

$$z=re^{i\varphi}, \tag{3.15}$$

где r — модуль z, φ — аргумент z.

Выражение (3.15) называется *показательной формой* комплексного числа z.

Связь между показательной и гиперболическими функциями

Имеем при любом комплексном z в силу (3.9), (3.10), (3.11):

$$e^{z}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots=$$
$$=\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)+\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)=\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z.$$

Заменяя z на $-z$, получим:

$$e^{-z}=\operatorname{ch}z-\operatorname{sh}z.$$

Почленное сложение и вычитание двух последних равенств дает:

$$e^{z}+e^{-z}=2\operatorname{ch}z;\quad e^{z}-e^{-z}=2\operatorname{sh}z,$$

откуда

$$\operatorname{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2};\quad \operatorname{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}. \tag{3.16}$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

Из (3.10), (3.12) следует:

$$\operatorname{ch}iz=1+\frac{i^2z^2}{2!}+\frac{i^4z^4}{4!}+\ldots=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\cos z$$

и аналогично

$$\cos iz=\operatorname{ch}z.$$

Из (3.11), (3.13) следует:

$$\operatorname{sh}iz=iz+\frac{i^3z^3}{3!}+\frac{i^5z^5}{5!}+\ldots=i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=i\sin z$$

и аналогично

$$\sin iz=i\operatorname{sh}z.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ch}iz&=\cos z, & \cos iz&=\operatorname{ch}z;\\ \operatorname{sh}iz&=i\sin z, & \sin iz&=i\operatorname{sh}z.\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Формулы (3.17) также непосредственно получаются из (3.14′) и (3.16).

Теорема сложения для показательной функции

Имеем, учитывая правило умножения абсолютно сходящихся рядов:

$$e^{z_1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z_1^k}{k!};\quad e^{z_2}=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{z_2^l}{l!};$$

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{k,\,l}\frac{z_1^kz_2^l}{k!\,l!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k+l=n}\frac{z_1^kz_2^l}{k!\,l!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!\,l!}z_1^kz_2^l.$$

Но

$$\sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\,l!} z_1^k z_2^l = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k} =$$
$$= (z_1 + z_2)^n$$

(формула бинома Ньютона).

Следовательно,

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1 + z_2}.$$

Таким образом, доказана теорема сложения для показательной функции:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{3.18}$$

Отсюда видно, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается. В самом деле, если бы $e^{z_1} = 0$, то для любого z $e^z = e^{z_1} e^{z - z_1} = 0 e^{z - z_1} = 0$, но это нелепо, так как $e^0 = 1$.

Теоремы сложения для тригонометрических функций

Учитывая (3.14′), (3.18), (3.14), получаем:

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{2} =$$
$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)}{2} =$$
$$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{2i} =$$
$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)}{2i} =$$
$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Таким образом, доказаны теоремы сложения для косинуса и синуса:

$$\left.\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2; \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Теоремы сложения для гиперболических функций

Из (3.17) и (3.19) находим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch}(z_1+z_2) &= \cos i(z_1+z_2) = \cos iz_1 \cos iz_2 - \\ &- \sin iz_1 \sin iz_2 = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - i \operatorname{sh} z_1\, i \operatorname{sh} z_2 = \\ &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2; \\ \operatorname{sh}(z_1+z_2) &= \frac{\sin i(z_1+z_2)}{i} = \frac{\sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2}{i} = \\ &= \frac{i \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1\, i \operatorname{sh} z_2}{i} = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2. \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

Периодичность

Показательная функция e^z имеет период $2\pi i$. В самом деле,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ (как выражающиеся через e^z) имеют также период $2\pi i$.

Далее, функция e^{iz} имеет период 2π, так как

$$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz},$$

следовательно, $\cos z$, $\sin z$ (как выражающиеся через e^{iz}) имеют также период 2π.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Логарифмы комплексных чисел

Число w называется логарифмом комплексного числа z (по основанию e), если $e^w = z$. Всякое значение логарифма числа z обозначим знаком $\operatorname{Ln} z$. Пусть $z \neq 0$ (нуль, очевидно, не имеет логарифма, так как показательная функция в нуль не обращается). Пользуясь показательной формой данного числа z, $z = re^{i\varphi}$ (r — модуль, φ — аргумент) и алгебраической формой искомого числа w, $w = u + iv$, получим требование

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad e^u e^{iv} = re^{i\varphi},$$

откуда $e^u = r$, $v = \varphi + 2k\pi$ (k — целое число) и, следовательно,

$$w = \ln r + i(\varphi + 2k\pi).$$

Обратно, при всяком целом k последнее выражение, как непосредственно видно, есть значение логарифма числа z. Таким образом, $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, имеет бесконечно много значений, причем все они получаются по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{3.21}$$

(k — произвольное целое число) или

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \tag{3.21$'$}$$

Отсюда видно, что все значения $\operatorname{Ln} z$ получаются из какого-нибудь одного $(\operatorname{Ln} z)_0$ по формуле

$$\operatorname{Ln} z = (\operatorname{Ln} z)_0 + 2k\pi i \tag{3.21$''$}$$

(k — произвольное целое число).

Легко видеть, что обычные правила логарифмирования остаются в силе.

Степени с комплексными основаниями и комплексными показателями

Пусть A и B — любые комплексные числа (где $A \neq 0$). Полагают по определению

$$A^B = e^{B \operatorname{Ln} A}.$$

Отсюда видно, что эта степень, вообще говоря, имеет бесконечно много значений (так как $\operatorname{Ln} A$ имеет бесконечно много значений). В случае, когда B есть действительное целое число, значения показателя $B \operatorname{Ln} A$ правой части отличаются между собой на кратные от $2\pi i$, и, следовательно, A^B имеет в этом случае одно значение.

Пример.

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

(k — любое целое).

Обратные тригонометрические функции

Пусть z — какое-нибудь комплексное число. По определению $\operatorname{Arcsin} z$ есть любое комплексное число w такое, что $\sin w = z$. Следовательно, приходим к уравнению

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

или

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

решая которое, получим:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2};$$

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Таким образом, все значения арксинуса даются формулой

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{3.22}$$

Многозначность этой функции происходит от двух причин: двузначности квадратного корня, бесконечнозначности логарифма. Выражение (3.22) имеет смысл для всех значений z, ибо выражение, стоящее под знаком логарифма, всегда отлично от нуля.

Далее, $\operatorname{Arccos} z$ есть любое комплексное число w такое, что $\cos w = z$, следовательно, получаем уравнение

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

или

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

откуда

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1};$$

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Таким образом, все значения арккосинуса даются формулой

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \tag{3.23}$$

Многозначность этой функции происходит от двух причин: двузначности квадратного корня и бесконечнозначности логарифма. Равенство (3.23) имеет смысл для всех значений z, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, имеет смысл для всех значений z и так как это выражение всегда отлично от нуля.

Рассмотрим еще $\operatorname{Arctg} z$, определяемый как любое такое число w, что $\operatorname{tg} w = z$. Имеем:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)} = z$$

или

$$\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = iz;$$

следовательно,

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z};$$

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}. \tag{3.24}$$

Многозначность этой функции происходит от многозначности логарифма. Выражение (3.24) теряет смысл при $z = \pm i$.

Обратные гиперболические функции

По определению $\operatorname{Arsh} z$ есть любое такое комплексное число w, что $\operatorname{sh} w = z$. Имеем:

$$\frac{e^{w} - e^{-w}}{2} = z$$

или

$$e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2 + 1};$$

$$w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right). \tag{3.25}$$

Далее, $\operatorname{Arch} z$ есть любое такое w, что $\operatorname{ch} w = z$. Тогда

$$\frac{e^w + e^{-w}}{2} = z;$$

$$e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0;$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2 - 1};$$

$$w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

следовательно,

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \tag{3.26}$$

Затем, $\operatorname{Arth} z$ есть по определению любое такое w, что $\operatorname{th} w = z$. Тогда

$$\frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = z;$$

$$\frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} = z;$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z};$$

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}. \tag{3.27}$$

Это выражение теряет смысл при $z = \pm 1$.

В теории аналитических функций многозначные функции целесообразно рассматривать как однозначные на некоторых многолистных поверхностях (так называемых римановых поверхностях). Не имея возможности привести здесь какое бы то ни было общее определение этих поверхностей, ограничимся примерами наглядного построения этих поверхностей для простейших многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

Рассмотрим n экземпляров плоскости комплексного переменного z (которые занумеруем числами $1, 2, \ldots n$), разрезанных по положительной части действительной оси, и склеим их следующим образом: нижний край разреза первого экземпляра склеивается с верхним краем разреза второго экземпляра, нижний край разреза второго экземпляра — с верхним краем разреза третьего экземпляра и т. д., нижний край разреза $(n-1)$-го экземпляра — с верхним краем разреза n-го экземпляра, наконец, нижний край разреза n-го экземпляра — с верхним краем разреза первого экземпляра (последнее склеивание невозможно сделать без пересечений). В результате получится n-листная поверхность с точкой разветвления над 0. Описывая простой замкнутый контур, охватывающий точку 0, мы после каждого обхода будем попадать на следующий лист и после n обходов придем в первоначальное положение. n-значную функцию $\sqrt[n]{z}$ на обычной плоскости комплексного переменного можно рассматривать как однозначную на построенной n-листной поверхности. Это будет риманова поверхность для $\sqrt[n]{z}$.

Рассмотрим теперь бесконечное множество экземпляров плоскости комплексного переменного (пронумерованных с помощью всех целых чисел $\gtreqless 0$) с разрезами по положительной части действительной оси. Для каждого целого n склеим нижний край n-го экземпляра с верхним краем $(n+1)$-го экземпляра. В результате получим бесконечнолистную поверхность. Обходя замкнутый контур, охватывающий точку 0, в любом направлении любое число раз, мы будем всякий раз попадать на новые листы и никогда не вернемся в первоначальное положение. Бесконечнозначную функцию $\operatorname{Arg} z$ на обычной плоскости комплексного переменного можно рассматривать как однозначную на построенной бесконечнолистной поверхности. Тогда на этой же поверхности $\operatorname{Ln} z$ можно рассматривать как однозначную функцию (эта поверхность является римановой поверхностью для $\operatorname{Ln} z$).

§ 6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Производная комплексной функции действительного переменного

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплексная функция действительного переменного t.

Эта функция называется *непрерывной* в точке t, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|\Delta t| < \eta$ имеем $|z(t + \Delta t) - z(t)| < \varepsilon$. Для непрерывности $z(t)$ в точке t необходима и достаточна непрерывность функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t.

Производная от $z(t)$ в точке t есть по определению

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

если он существует, и обозначается $\frac{dz}{dt}$ или $z'(t)$. Из определения следует, что для существования $\frac{dz}{dt}$ необходимо и достаточно существование $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, причем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}.$$

Определение производной функции комплексного переменного

Пусть $w=f(z)$ — функция комплексного переменного z. Эта функция называется *непрерывной* в точке z, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta>0$, что при $|\Delta z|<\eta$ (если $z+\Delta z$ входит в область определения функции) имеем $|\Delta w|<\varepsilon$.

Производная от $w=f(z)$ в точке z (функция предполагается определенной в окрестности этой точки) есть по определению

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

если он существует, и обозначается $\frac{dw}{dz}$ или $f'(z)$.

Для существования производной в точке z необходима непрерывность функции в этой точке.

Далее, будем говорить, что функция *дифференцируема* в точке z, если из приращения функции в этой точке

$$f(z+\Delta z)-f(z)$$

может быть выделена главная линейная часть, т. е. такая часть вида $C\Delta z$ (где C — некоторое комплексное число), что оставшаяся часть будет бесконечно малой высшего порядка относительно Δz. Таким образом, $f(z)$ дифференцируема в точке z, если существует представление

$$f(z+\Delta z)-f(z)=C\Delta z+\gamma(\Delta z)\Delta z,$$

где $\gamma(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Отсюда следует, что

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=C+\gamma(\Delta z)\to C,$$

а это значит, что в рассматриваемой точке $f(z)$ имеет производную $f'(z)=C$.

Обратно, если функция $f(z)$ имеет производную в рассматриваемой точке, то

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)+\gamma(\Delta z),$$

где $\gamma(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$, откуда

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\gamma(\Delta z)\Delta z,$$

и, следовательно, в рассматриваемой точке функция $f(z)$ дифференцируема.

Таким образом, существование производной и дифференцируемость в точке — явления эквивалентные.

Напоминание о полном дифференциале функции двух действительных переменных

Функция $u(x, y)$ называется *дифференцируемой*, или имеющей *полный дифференциал* в данной точке x, y (функция предполагается определенной в окрестности этой точки), если из полного приращения функции в этой точке

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x, y)$$

может быть выделена главная линейная часть, т. е. такая часть вида $A\,\Delta x+B\,\Delta y$ (где A и B — некоторые числа), что оставшаяся часть будет бесконечно малой высшего порядка относительно $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Таким образом, $u(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), если существует представление

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x, y)=$$
$$=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\gamma(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

где

$$\gamma(\Delta x, \Delta y)\to 0 \text{ при } \left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\}\to 0.$$

Тогда (беря $\Delta y=0$)

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x, y)=A\,\Delta x+\gamma(\Delta x, 0)\,|\Delta x|;$$

$$\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x, y)}{\Delta x}=A\pm\gamma(\Delta x, 0)\to A \text{ при } \Delta x\to 0,$$

откуда видно, что в рассматриваемой точке функция $u(x, y)$ имеет частную производную по x, причем $\frac{\partial u}{\partial x}=A$. Аналогично обнаруживается существование частной производной по y и равенство $\frac{\partial u}{\partial y}=B$.

Таким образом, главная линейная часть полного приращения функции $u(x, y)$ равна $\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$. Она называется *полным дифференциалом* функции $u(x, y)$ в данной точке. Обозначая полный дифференциал знаком du, а приращения независимых переменных знаками dx и dy, получим формулу $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

Мы видим, что из существования полного дифференциала вытекает существование частных производных. Обратное неверно, т. е. может случиться, что частные производные в точке существуют, а полного дифференциала в этой точке не существует. Тем не менее, если частные производные существуют в окрестности рассматриваемой точки и, кроме того, в данной точке непрерывны, то в данной точке существует полный дифференциал.

В самом деле, используя формулу Лагранжа, получим:

$$
\begin{gathered}
u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)= \\
=[u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)]+[u(x, y+\Delta y)-u(x, y)]= \\
=u'_x(x+\theta\,\Delta x, y+\Delta y)\,\Delta x+u'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\,\Delta y= \\
=\left[u'_x(x, y)+\alpha\right]\Delta x+\left[u'_y(x, y)+\beta\right]\Delta y= \\
=u'_x(x, y)\,\Delta x+u'_y(x, y)\,\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y; \\
0<\begin{matrix}\theta\\ \theta_1\end{matrix}<1;\quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\to 0 \quad \text{при} \quad \left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\}\to 0.
\end{gathered}
$$

Но

$$
\left|\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|\to 0 \quad \text{при} \quad \left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\}\to 0;
$$

следовательно, $u'_x(x, y)\,\Delta x+u'_y(x, y)\,\Delta y$ является главной линейной частью полного приращения и, таким образом, полный дифференциал существует.

Необходимые условия дифференцируемости функции комплексного переменного

Пусть

$$
w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)
$$

есть функция комплексного переменного $z=x+iy$, дифференцируемая в данной точке z.

Так как в данной точке $f(z)$ дифференцируема, то в этой точке $u(x, y)$ и $v(x, y)$ тоже дифференцируемы. В самом деле, если из приращения $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ может быть выделена главная линейная часть, то действительная часть и коэффициент при i в ней суть соответственно главные линейные части полных приращений

$$\Delta u = u(x+\Delta x, \quad y+\Delta y) - u(x, y)$$

и

$$\Delta v = v(x+\Delta x, \quad y+\Delta y) - v(x, y).$$

Если смещенная точка $z+\Delta z$ будет стремиться к z по горизонтальному пути, то в выражении

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

следует положить $\Delta y = 0$; тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если смещенная точка стремится к z по вертикальному пути, то в выражении

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

следует положить $\Delta x = 0$. Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y} \to \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, для существующей по условию производной $f'(z)$ получим выражения:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Уравнения (3.28) называются *условиями Коши — Римана*.

Достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши — Римана в данной точке. Тогда (ниже $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\to 0$ при $\left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\}\to 0$) имеем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\,\Delta v}{\Delta x+i\,\Delta y}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)+(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\,\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\,\Delta y)+(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\,\Delta y}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\,\Delta y}.$$

Но

$$\left|\frac{(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\,\Delta y}\right|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\to 0 \text{ при } \left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\}\to 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

т. е. $f'(z)$ существует.

Итак, для дифференцируемости функции комплексного переменного $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ в данной точке необходимо и достаточно, чтобы в этой точке $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы и удовлетворяли бы условиям Коши — Римана (3.28).

Для $f'(z)$ имеем формулы

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\mp i\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Пример. Пусть $f(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$. Все условия, очевидно, выполнены, и из (3.29) получим $f'(z)=e^z$.

Производная сложной функции

Пусть $w = f(z)$, $z = \varphi(\zeta)$; тогда $w = f[\varphi(\zeta)]$. Из равенства

$$\frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta \zeta} \tag{3.30'}$$

при $\Delta\zeta \to 0$ находим в пределе

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta}, \tag{3.30}$$

предполагая, что φ дифференцируема в точке ζ, f дифференцируема в точке $z = \varphi(\zeta)$.

Вывод формулы (3.30) является законным, когда $\frac{dz}{d\zeta} \neq 0$, так как тогда при $\Delta\zeta$ достаточно малом будем иметь $\Delta z \neq 0$, и запись (3.30′) имеет смысл. Если в данной точке $\frac{dz}{d\zeta} = 0$, то доказательство нуждается в поправках. Если существуют как угодно малые $\Delta\zeta$, для которых $\Delta z \neq 0$, то из (3.30′) следует, что при стремлении $\Delta\zeta$ к нулю по таким значениям отношение $\frac{\Delta w}{\Delta \zeta}$ стремится к

$$\frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} 0 = 0.$$

Для тех значений $\Delta\zeta$, для которых $\Delta z = 0$, очевидно, $\Delta w = 0$, поэтому, если существуют как угодно малые $\Delta\zeta$, для которых $\Delta z = 0$, то при стремлении $\Delta\zeta$ к нулю по таким значениям отношение $\frac{\Delta w}{\Delta \zeta}$ тоже стремится к нулю. Таким образом, $\frac{\Delta w}{\Delta \zeta}$ стремится к нулю при $\Delta\zeta \to 0$, поэтому $\frac{dw}{d\zeta}$ существует и равно нулю, а так как в рассматриваемом случае правая часть формулы (3.30) тоже равна нулю, то формула (3.30) справедлива и в случае $\frac{dz}{d\zeta} = 0$.

Формально техника дифференцирования функций комплексного переменного не отличается от таковой для функций действительного переменного, и мы не будем останавливаться на ней. Заметим еще, что если $z(t)$ — комплексная функция действительного переменного, $f(z)$ — комплексная функция комплексного переменного, то $f[z(t)]$ будет комплексной функцией действительного переменного. Рассуждая, как при выводе формулы (3.30), получим

$$\{f[z(t)]\}' = f'[z(t)]\, z'(t) \tag{3.31}$$

в предположении существования производных, фигурирующих в правой части.

§ 7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Множество точек на плоскости называется *открытым*, если вокруг каждой его точки можно описать круг, целиком лежащий в рассматриваемом множестве. Открытое множество называется *областью*, если всякие две его точки можно соединить непрерывной дугой, лежащей в рассматриваемом множестве. Граничной точкой области называется точка, не принадлежащая области и такая, что в любой близости к ней имеются точки рассматриваемой области. Совокупность всех граничных точек области называется *границей* области. Если к области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется *замкнутой областью*. Множество точек на плоскости называется *ограниченным*, если его можно поместить на некотором круге достаточно большого радиуса.

Примеры. Внутренность простого замкнутого контура есть ограниченная область. Внутренность простого замкнутого контура вместе с точками самого контура образуют ограниченную замкнутую область.

Если C — простой замкнутый контур, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — простые замкнутые контуры, лежащие внутри C, но вне друг друга, то множество точек, лежащих внутри C, но вне всех $C_1, C_2 \ldots, C_n$, есть ограниченная область. Вся плоскость, полуплоскость, полоса между параллельными прямыми, внутренность угла дают примеры неограниченных областей.

Функция комплексного переменного $f(z)$, определенная в области D и дифференцируемая в каждой точке этой области, называется *аналитической* в области D.

Функция двух действительных переменных $u(x, y)$, определенная в области D, имеющая в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{3.32}$$

называется *гармонической* в области D.

Между аналитическими и гармоническими функциями имеется простая связь.

Действительная часть всякой аналитической функции есть гармоническая функция.

В самом деле, пусть

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

есть аналитическая функция в области D. Будем предполагать, что $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D (заметим, что это предположение не является ограничением, ибо так всегда будет, но из самого определения аналитической функции этого непосредственно не видно). Дифференцируя уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

соответственно по x и по y и учитывая независимость частных производных от последовательности дифференцирований, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0;$$

следовательно, $u(x, y)$ есть гармоническая функция в области D.

Очевидно $v(x, y)$ будет тоже гармонической, ибо является действительной частью для $-if(z)=v(x, y)-iu(x, y)$.

В случае односвязной области D (область называется *односвязной*, если всякий непрерывный замкнутый путь, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя из области) справедливо обратное предложение.

Всякая гармоническая функция в односвязной области D является действительной частью некоторой (однозначной) аналитической функции.

В самом деле, если $u(x, y)$ — гармоническая функция в области D, то можно найти такую функцию $v(x, y)$, которая связана с $u(x, y)$ уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

если заметить, что выражения $P=-\frac{\partial u}{\partial y}$ и $Q=\frac{\partial u}{\partial x}$ удовлетворяют условию $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0.$$

Следовательно, $u(x, y)+iv(x, y)$ есть аналитическая функция комплексного переменного $z=x+iy$ в области D.

Гармоническая функция $v(x, y)$ называется *сопряженной* для гармонической функции $u(x, y)$. Мы видим, что если $u(x, y)$ — гармоническая, то выражение $-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ является полным дифференциалом и задача отыскания сопряженной гармонической функции есть задача интегрирования этого полного дифференциала. Сопряженная гармоническая функция определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

§ 8. ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Простой интеграл от комплексной функции действительного переменного

Пусть $f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ — непрерывная комплексная функция действительного переменного t на сегменте $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (рис. 28).

Разбив этот сегмент на части с помощью точек деления $t_k (t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1})$ и взяв на каждой части какую-нибудь точку τ_k, составим сумму

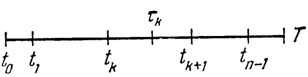


Рис. 28.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\,\Delta t_k,$$

где $\Delta t_k = t_{k+1}-t_k$.

Тогда предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшей из разностей Δt_k есть по определению интеграл $\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt$. Из равенства

$$\sum_k f(\tau_k)\,\Delta t_k=\sum_k \varphi(\tau_k)\,\Delta t_k+i\sum_k \psi(\tau_k)\,\Delta t_k$$

в пределе получим формулу

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt + i\int_{t_0}^{T} \psi(t)\,dt.$$

Определение интеграла функции комплексного переменного; его выражение через криволинейные интегралы и простейшие свойства

Пусть $f(z)$ — непрерывная функция комплексного переменного на некоторой кусочно-гладкой дуге AB (рис. 29). Разобьем дугу AB на части; пусть комплексные числа, соответствующие точкам деления, будут z_k. На каждой части возьмем точку, соответствующую числу ζ_k (в качестве ζ_k, в частности, можно взять z_k), и образуем сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\,\Delta z_k,$$

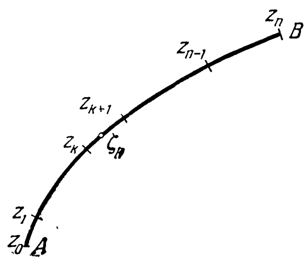


Рис. 29.

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Предел этой суммы (при стремлении к нулю длины наибольшей из частных дуг) называется *интегралом* от $f(z)$ вдоль дуги AB и обозначается знаком

$$\int_{AB} f(z)\,dz. \tag{3.33}$$

Легко выразить этот интеграл через обыкновенные криволинейные интегралы [отсюда будет вытекать и факт существования интеграла (3.33), если существование криволинейных интегралов считать известным].

Полагая $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$; $z_k=x_k+iy_k$, будем иметь:

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz=\lim\sum_k f(z_k)\,\Delta z_k=\lim\sum_k [u(x_k, y_k)+$$
$$+iv(x_k, y_k)](\Delta x_k+i\,\Delta y_k)=$$
$$=\lim\sum_k [u(x_k, y_k)\Delta x_k-v(x_k, y_k)\Delta y_k]+$$
$$+i\lim\sum_k [v(x_k, y_k)\Delta x_k+u(x_k, y_k)\Delta y_k]=$$
$$=\int\limits_{AB} u\,dx-v\,dy+i\int\limits_{AB} v\,dx+u\,dy.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz=\int\limits_{AB} u\,dx-v\,dy+i\int\limits_{AB} v\,dx+u\,dy. \quad (3.34)$$

Из непосредственного определения интеграла (3.33), а также из формулы (3.34) вытекает, что при перемене направления пути интегрирования интеграл заменяется противоположным числом: $\int\limits_{BA}=-\int\limits_{AB}$; если путь разбит на части, то интеграл по всему пути равен сумме интегралов по его частям; интеграл по замкнутому пути не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода (в случае простого замкнутого контура можно употреблять обозначения $\oint\limits^{\circlearrowleft}$ и $\oint\limits^{\circlearrowright}$, причем $\oint\limits^{\circlearrowright}=-\oint\limits^{\circlearrowleft}$); постоянные множители выносятся за знак интеграла; интеграл суммы равен сумме интегралов.

Преобразование интеграла функции комплексного переменного в простой интеграл от комплексной функции действительного переменного

Если

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

суть параметрические уравнения дуги AB, то $z=z(t)$, где $z(t)=x(t)+iy(t)$, есть *комплексное параметрическое уравнение* дуги AB. Тогда интеграл от функции комплексного переменного (3.33) может быть преобразован в простой интеграл от комплексной функции действительного переменного по формуле

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[z(t)]\,z'(t)\,dt \tag{3.35}$$

[предполагаем $z(t)$ непрерывно дифференцируемой функцией от t].

Формулу (3.35) можно вывести непосредственно, а также получить ее из аналогичного правила для обыкновенных криволинейных интегралов следующим образом:

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{AB} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right)dt + i\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt}\right)dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}(u+iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z)\frac{dz}{dt}\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)dt.$$

Пример. Найти $\oint\limits_C \frac{dz}{z-a}$, где C — круг радиуса R с центром $a=\alpha+i\beta$. Параметрические уравнения этого круга суть

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + R\cos\varphi, \\ y &= \beta + R\sin\varphi, \end{aligned}\right\} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

следовательно, комплексное параметрическое уравнение будет $z=\alpha+i\beta+R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ или $z=a+Re^{i\varphi}$. Поэтому

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\varphi})'\,d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{3.36}$$

Если целое число $n \neq -1$, то

$$\oint_C (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{i\varphi})^n (Re^{i\varphi})' d\varphi = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\varphi} d\varphi =$$

$$= R^{n+1} i \left. \frac{e^{(n+1)i\varphi}}{(n+1)i} \right|_0^{2\pi} = 0. \qquad (3.36')$$

Таким образом, при целом n

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 1 & n = -1. \end{cases} \qquad (3.36'')$$

Оценка модуля интеграла

Если на кусочно-гладкой дуге AB, имеющей длину L' имеем $|f(z)| \leqslant M$, где $f(z)$ — непрерывная функция комплексного переменного на дуге AB, то

$$\left| \sum_k f(z_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_k |f(z_k)| \, |\Delta z_k| \leqslant M \sum_k |\Delta z_k|.$$

Но $|\Delta z_k|$ есть расстояние между точками z_k и z_{k+1} и, следовательно, $\sum_k |\Delta z_k|$ есть длина ломаной линии, вписанной в дугу AB, поэтому $\sum_k |\Delta z_k| \leqslant L$.

Следовательно, $\left| \sum_k f(z_k) \Delta z_k \right| \leqslant ML$, откуда в пределе

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leqslant ML. \qquad (3.37)$$

Таким образом, модуль интеграла от непрерывной функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой дуги не превосходит произведения длины дуги на максимум модуля подынтегральной функции на этой дуге.

Предельный переход под знаком интеграла

Пусть

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

есть последовательность непрерывных функций комплексного переменного z на кусочно-гладкой дуге AB (длины L), равномерно сходящаяся к $f(z)$ на этой дуге (это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ для всех z на AB будем иметь $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$). Функция $f(z)$ будет непрерывна на AB (это доказывается так же, как в случае действительного переменного). Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int_{AB} f_n(z)\,dz = \int_{AB} f(z)\,dz. \tag{3.38}$$

В самом деле, взяв $\varepsilon > 0$, найдем такое N, что при $n > N$ будет $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ для всех z на AB. Тогда по (3.37) получим:

$$\left| \int_{AB} f_n(z)\,dz - \int_{AB} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{AB} [f_n(z) - f(z)]\,dz \right| < \varepsilon L$$

$$\text{при } n > N,$$

что и доказывает (3.38).

§ 9. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Пусть функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитична в односвязной области D. Предположим, что частные производные первого порядка от $u(x, y)$, $v(x, y)$, существование которых вытекает из аналитичности $f(z)$, непрерывны в области D (заметим, что это предположение не является ограничением, ибо так всегда будет, но из определения аналитической функции этого непосредственно не видно). Пусть C — какой-нибудь кусочно-гладкий замкнутый путь, лежащий в D; тогда в силу (3.34)

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i \oint_C v\,dx + u\,dy;$$

но в силу условий Коши — Римана имеем $\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$; следовательно, выражения $u\,dx - v\,dy$, $v\,dx + u\,dy$ являются полными дифференциалами в односвязной области D, поэтому интегралы по замкнутому контуру C от них равны нулю и, следовательно, $\oint\limits_C f(z)\,dz = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Основная теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции вдоль всякого кусочно-гладкого замкнутого контура, лежащего в области D, равен нулю.

В частности, если C — простой замкнутый контур и $f(z)$ аналитична внутри него и на нем, то

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 0. \tag{3.39}$$

Теорема Коши для сложного контура

Пусть C — простой замкнутый контур и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — простые замкнутые контуры, лежащие внутри C и вне друг друга. Пусть $f(z)$ аналитична в области, заключенной между контуром C и контурами C_1, C_2, $\ldots$, C_n, и и на всех этих контурах. Тогда

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{C_n} f(z)\,dz. \tag{3.39'}$$

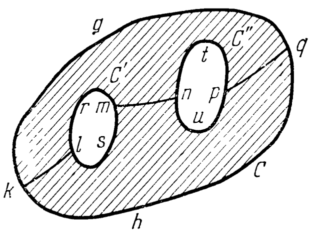


Рис. 30.

В самом деле, пусть, например, внутри контура C (рис. 30) лежат два контура C' и C'' и $f(z)$ аналитична между контуром C и контурами C', C'', а также на всех этих контурах. Проведя простые гладкие дуги kl, mn, pq, соединяющие C и C', C' и C'', C'' и C, получим в силу основной теоремы Коши:

$$\int\limits_{qgklrmntpq} f(z)\,dz = 0,$$

$$\int\limits_{khqpunmslk} f(z)\,dz = 0.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что по каждой из дуг kl, mn, pq интегрирование происходит два раза в различных направлениях, получим:

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz + \oint\limits_{C'} f(z)\,dz + \oint\limits_{C''} f(z)\,dz = 0$$

или

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz = \oint\limits_{C'} f(z)\,dz + \oint\limits_{C''} f(z)\,dz.$$

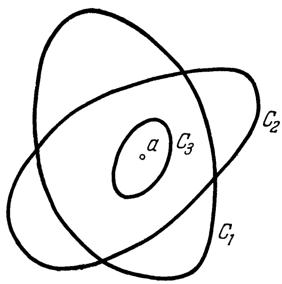


Рис. 31.

В частности, если $f(z)$ аналитична в окрестности точки a, кроме самой точки a, то интегралы по всем достаточно малым простым замкнутым контурам, окружающим a (взятым в одинаковом направлении, например положительном), равны между собой. В самом деле, пусть C_1 и C_2 (рис. 31) — достаточно малые контуры, окружающие a, и C_3 — контур, окружающий a и лежащий одновременно внутри C_1 и внутри C_2. По доказанному

$$\oint\limits_{C_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{C_3} f(z)\,dz; \qquad \oint\limits_{C_2} f(z)\,dz = \oint\limits_{C_3} f(z)\,dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{C_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{C_2} f(z)\,dz.$$

Формулу (3.39′) можно переписать еще так:

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz + \oint\limits_{C_1} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{C_n} f(z)\,dz = 0$$

или

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0, \tag{3.39''}$$

где Γ есть сложный контур, составленный из наружного контура C и внутренних контуров $C_1, \ldots, C_n$, причем положительное направление обхода Γ обозначает, что ограничиваемая область должна оставаться слева (следовательно, обход наружного контура происходит в положительном направлении, а обходы внутренних контуров происходят в отрицательном направлении).

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D. Из того факта, что интегралы этой функции по замкнутым путям, лежащим в D, равны нулю, следует, что интеграл от $f(z)$ не зависит от формы пути, а зависит лишь от начальной и конечной точек пути. Поэтому при обозначении интеграла нет надобности указывать путь, а достаточно лишь называть начало z_1 и конец z_2 пути, употребляя обозначение

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

Рассмотрим функцию (интеграл с переменным верхним пределом)

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Тогда

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta; \quad 1 = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} d\zeta;$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta; \quad f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,d\zeta;$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta.$$

Так как в точке z функция f непрерывна, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta>0$, что при $|\zeta-z|<\eta$ будем иметь $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. Беря в качестве пути, соединяющего z с $z+h$, прямолинейный отрезок и пользуясь оценкой (3.37), получим при $|h|<\eta$:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\frac{1}{|h|}|h|\varepsilon=\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z) \quad \text{или} \quad F'(z)=f(z).$$

Таким образом, аналитическая функция всегда имеет *первообразную*. В качестве таковой может быть взят интеграл с переменным верхним пределом.

Лемма. Если $\Phi'(z)=0$ в некоторой области, то в этой области $\Phi(z)=\text{const}$.

Полагая $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, найдем из условия $\Phi'(z)=0$, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$; но тогда $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ и, следовательно, $\Phi(z)=\text{const}$.

Из этой леммы следует, что всякие две первообразные от одной функции отличаются на постоянное. В самом деле, если $F_1'(z)=F_2'(z)$, то $\{F_2(z)-F_1(z)\}'=F_2'(z)-F_1'(z)=0$, и поэтому на основании леммы $F_2(z)-F_1(z)=\text{const}$.

Обозначая знаком $\int f(z)\,dz$ любую первообразную для аналитической функции $f(z)$, найдем на основании сказанного:

$$\int f(z)\,dz=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta+C,$$

где C — произвольное комплексное число.

Примечание. Техника отыскания первообразных (техника интегрирования) для аналитических функций формально не отличается от техники интегрирования элементарных функций действительного переменного, и мы не будем останавливаться на ней.

§ 10. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C (рис. 32), и на этом контуре. Фиксируем точку z внутри C и составим функцию

$$\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}.$$

Эта функция аналитична во всех точках внутри контура C и на нем, за исключением точки z. Однако при $\zeta\to z$ имеем $\varphi(\zeta)\to f'(z)$, поэтому если доопределить функцию φ в точке z требованием $\varphi(z)=f'(z)$, то $\varphi(\zeta)$ станет непрерывной функцией в ограниченной замкнутой области, ограниченной контуром C, и, следовательно, будет ограниченной.

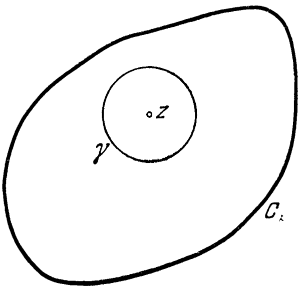


Рис. 32.

Таким образом, в рассматриваемой области $|\varphi(\zeta)|<K$, где K — некоторое положительное число.

Пусть γ — круг радиуса ρ с центром z, лежащий внутри C. По теореме Коши для сложного контура имеем:

$$\oint\limits_C \varphi(\zeta)\,d\zeta=\oint\limits_\gamma \varphi(\zeta)\,d\zeta,$$

но согласно правилу оценки модуля интеграла (3.37) имеем:

$$\left|\oint\limits_\gamma \varphi(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant 2\pi\rho K,$$

следовательно, переходя к пределу при $\rho\to 0$ в последнем равенстве, получим:

$$\oint\limits_C \varphi(\zeta)\,d\zeta=0,$$

или

$$\oint_C \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0,$$

или

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - f(z)\oint_C \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 0.$$

Но согласно теореме Коши для сложного контура и в силу (3.36)

$$\oint_C \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i,$$

поэтому предыдущее равенство принимает вид:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - 2\pi i f(z) = 0,$$

откуда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (3.40)$$

Формула (3.40) называется *интегральной формулой Коши* и является центральной формулой теории аналитических функций. Из формулы (3.40) видно, что значения аналитической функции внутри C вполне определяются значениями этой функции на C. Правая часть формулы (3.40) называется *интегралом Коши*.

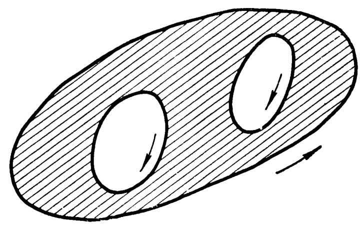


Рис. 33.

Вместо простого замкнутого контура C можно брать сложный контур Г, состоящий из наружного контура и нескольких внутренних контуров (рис. 33). Тогда в результате такого же рассуждения найдем, что если $f(z)$ — аналитическая функция в области, ограниченной сложным контуром Г, и на нем, то для всякой точки z в этой области справедливо равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{3.40'}$$

Это — интегральная формула Коши для сложного контура.

§ 11. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

Пусть Γ — кусочно-гладкая дуга (замкнутая или незамкнутая). Пусть $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция на дуге Γ (рис. 34). Тогда выражение

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{3.41}$$

имеющее смысл для всех z, не лежащих на Γ (ибо тогда подынтегральное выражение будет непрерывной функцией от ζ), называется *интегралом типа Коши*. То же можно сказать о выражении более общего вида

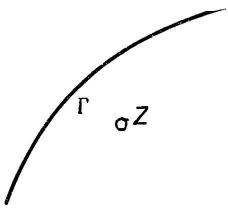


Рис. 34.

$$\Phi(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\,d\zeta, \tag{3.41'}$$

где k — натуральное число.

Покажем, что выражение (3.41') является аналитической функцией для всех значений z, не лежащих на дуге Γ. Учитывая формулу

$$a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+b^{k-1}),$$

получаем:

$$\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z)}{z_1-z}=\frac{\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)^k}-\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^k}}{z_1-z}=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{\frac{1}{(\zeta-z_1)^k}-\frac{1}{(\zeta-z)^k}}{z_1-z}\,d\zeta=\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^k-(\zeta-z_1)^k}{(z_1-z)(\zeta-z_1)^k(\zeta-z)^k}\,d\zeta=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^{k-1}+(\zeta-z)^{k-2}(\zeta-z_1)+\ldots+(\zeta-z_1)^{k-1}}{(\zeta-z_1)^k(\zeta-z)^k}\,d\zeta.$$

Фиксируя z и полагая

$$\Psi(\zeta, z_1) = \frac{(\zeta - z)^{k-1} + (\zeta - z)^{k-2}(\zeta - z_1) + \ldots + (\zeta - z_1)^{k-1}}{(\zeta - z_1)^k (\zeta - z)^k},$$

можем написать:

$$\frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z} = \int_\Gamma \varphi(\zeta)\Psi(\zeta, z_1)\,d\zeta.$$

Очевидно, $\Psi(\zeta, z_1)$ есть непрерывная функция своих аргументов, когда ζ лежит на Γ и z_1 не лежит на Γ.

Она будет равномерно непрерывной функцией переменных ζ, z_1, когда ζ находится на Γ, z_1 — на круге с центром z, не имеющем общих точек с Γ (по теореме о равномерной непрерывности функции, непрерывной на ограниченном замкнутом множестве). Отсюда следует, что при $z_1 \to z$ имеем $\Psi(\zeta, z_1) \to \Psi(\zeta, z)$ равномерно относительно ζ на Γ. Вследствие этого излагаемый ниже предельный переход под знаком интеграла является законным.

Переходя к пределу при $z_1 \to z$, получим:

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z} = \int_\Gamma \varphi(\zeta)\Psi(\zeta, z)\,d\zeta.$$

Учитывая, что $\Psi(\zeta, z) = \dfrac{k}{(\zeta - z)^{k+1}}$, и замечая, что

$$\frac{k\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}\right],$$

приходим к формуле

$$\Phi'(z) = k\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}\right]d\zeta.$$

Таким образом, $\Phi(z)$ имеет производную в каждой точке z, не лежащей на Γ.

Итак, если $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция на кусочно-гладкой дуге Γ, то функция

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}\,d\zeta$$

является аналитической для всех значений z, не лежащих на Γ, причем производная этой функции получается по правилу дифференцирования под знаком интеграла:

$$\Phi'(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right]d\zeta=k\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta. \tag{3.42}$$

Выражение для $\Phi'(z)$ имеет снова тип (3.41′), поэтому к нему применимо все сказанное о $\Phi(z)$. Отсюда заключаем, что функция, определяемая формулой

$$\Phi(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\,d\zeta$$

для всех значений z, не лежащих на Γ, имеет производные всех порядков, причем выражения для них получаются в результате последовательных дифференцирований под знаком интеграла:

$$\Phi^{(n)}(z)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right]d\zeta=$$
$$=k(k+1)\ldots(k+n-1)\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+n}}. \tag{3.43}$$

§ 12. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в какой-нибудь области D. Пусть C — замкнутый контур, лежащий вместе со своей внутренностью в этой области. Для всех точек z, лежащих внутри этого контура, имеем на основании интегральной формулы Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Но интеграл Коши, стоящий в правой части, является частным случаем интеграла типа Коши, следовательно, на основании изложенного в § 11, $f(z)$ имеет внутри C производные всех порядков, получающиеся на основании (3.43) по формуле

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \qquad (3.44)$$

Так как любую точку области D можно окружить замкнутым контуром, лежащим (вместе с внутренностью) в области D, то приходим к следующему выводу: всякая аналитическая функция в какой-нибудь области имеет в этой области производные *всех порядков*, причем все они являются аналитическими функциями в этой области.

Следует заметить, что функции действительного переменного таким свойством не обладают. Функция действительного переменного может иметь первую производную, но не иметь второй производной.

§ 13. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Будем говорить, что последовательность функций

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots,$$

определенных в некоторой области D, *сходится равномерно внутри области* D, если она сходится равномерно на каждой ограниченной замкнутой области, лежащей в D.

Теорема. Если последовательность аналитических функций в области D

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

сходится равномерно внутри области D к функции $f(z)$, то $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, причем последовательность производных

$$f_1'(z),\ f_2'(z),\ \ldots,\ f_n'(z),\ \ldots$$

равномерно сходится внутри области D к производной предельной функции, т. е. к $f'(z)$.

Пусть C — замкнутый контур, лежащий вместе с внутренностью в D, и z — точка внутри C. Тогда по формуле Коши

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Но $f_n(\zeta) \to f(\zeta)$ равномерно на C, следовательно,

$$\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \to \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

равномерно на C (при фиксированном z); поэтому на основании правила предельного перехода (3.38)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Таким образом, внутри C предельная функция $f(z)$ выражается интегралом типа Коши, следовательно, является аналитической. Но любую точку области D можно окружить таким контуром C, следовательно, предельная функция $f(z)$ аналитична во всей области D. Пусть теперь Δ — какая-нибудь ограниченная замкнутая область (рис. 35), лежащая в D, и C — замкнутый контур длины L, лежащий вместе с внутренностью в D и такой, что Δ лежит внутри C.

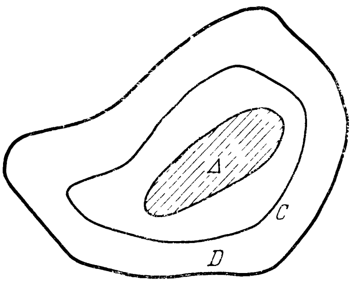


Рис. 35.

Пусть δ — расстояние между C и Δ (т. е. наименьшее из расстояний точек на C от точек в Δ). Имеем при z, лежащем в Δ [в силу формул (3.44) для $n = 1$]:

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Но $f_n(\zeta) \to f(\zeta)$ на C равномерно, следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ при всех ζ на C. Тогда из последней формулы найдем (по правилу оценки модуля интеграла):

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} L \frac{\varepsilon}{\delta^2}$$

при $n > N$ и любом z на Δ. Этим доказано, что $f'_n(z) \to f'(z)$ равномерно на любой ограниченной замкнутой области Δ, лежащей в D.

Замечание. Мы видим, что последовательность производных $f'_n(z)$ находится в таких же условиях, как последовательность функций $f_n(z)$, поэтому к ней также применима доказанная теорема.

Таким образом, если последовательность аналитических функций $f_n(z)$ в области D равномерно сходится внутри D к $f(z)$, то последовательность производных любого порядка от $f_n(z)$ равномерно сходится внутри D к производной такого же порядка от $f(z)$.

Пусть теперь имеем функциональный ряд

$$\sum \varphi_n(z),$$

члены которого суть аналитические функции в области D. Из доказанного следует, что если этот ряд равномерно сходится внутри D, то его сумма аналитична в D и ряд можно сколько угодно раз почленно дифференцировать, причем все получающиеся ряды равномерно сходятся внутри D.

Аналитичность суммы степенного ряда

Пусть $\sum\limits_0^\infty A_n z^n$ — степенной ряд и R — его радиус сходимости. Пусть $0 < r < R$. Точка r, как лежащая внутри круга сходимости (рис. 36), есть точка абсолютной сходимости степенного ряда, т. е. ряд $\sum |A_n r^n|$ сходится. Но при $|z| \leqslant r$ имеем $|A_n z^n| \leqslant |A_n r^n|$, поэтому степенной ряд $\sum A_n z^n$ равномерно сходится на круге $|z| \leqslant r$. Так как любая замкнутая область, лежащая внутри круга сходимости, может быть заключена в круг $|z| \leqslant r$ при надлежащем выборе числа $r < R$, то приходим к следующему заключению: всякий степенной ряд равномерно сходится *внутри* круга сходимости.

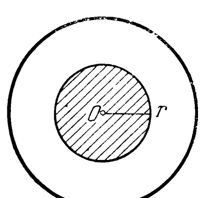


Рис. 36.

Примечание. На внутренности круга сходимости сходимость может быть неравномерной.

Так как члены степенного ряда $A_n z^n$ являются аналитическими функциями, то из доказанной теоремы следует, что сумма степенного ряда есть аналитическая функция внутри круга сходимости и что степенной ряд можно любое число раз почленно дифференцировать внутри круга сходимости. Следовательно, получающиеся в результате этого степенные ряды имеют не меньший радиус сходимости (на самом деле — тот же радиус сходимости).

Аналогично, степенной ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} A_n (z-a)^n$ равномерно сходится внутри круга с центром в точке a (рис. 37),

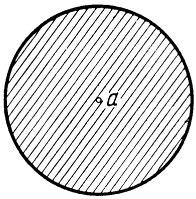


Рис. 37.

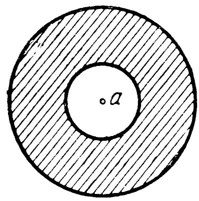


Рис. 38.

а его сумма есть аналитическая функция внутри этого круга; ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$, имеющий кольцо сходимости (рис. 38), равномерно сходится внутри кольца и его сумма есть аналитическая функция внутри этого кольца. При этом законно почленное дифференцирование любое число раз.

§ 14. РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри круга с центром a (радиус которого может быть, в частности, равен $+\infty$ — тогда это будет вся плоскость).

Пусть z — точка внутри данного круга и C — концентрическая окружность меньшего радиуса такая, что z лежит внутри нее (рис. 39). Пусть $r = |z-a|$, ρ — радиус круга C. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

При ζ на C имеем:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)},$$

и так как $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{r}{\rho}<1$, то последнее выражение можно рассматривать как сумму убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{\zeta-a}$ и знаменателем $\frac{z-a}{\zeta-a}$. Таким образом,

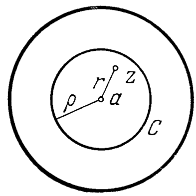


Рис. 39.

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

Сходимость этого ряда равномерна по ζ на C (при фиксированном z), так как этот ряд мажорируется числовой убывающей геометрической прогрессией $\sum\frac{r^n}{\rho^{n+1}}$.

Умножая предыдущее равенство на $f(\zeta)$, интегрируя почленно по C и деля на $2\pi i$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

или

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(z-a)^n,$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

причем Γ есть произвольно фиксированная окружность с центром a, лежащая внутри первоначально заданного круга (замена C на Γ законна, так как $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ аналитична между C и Γ, включая их).

Итак доказана следующая теорема.

Теорема. Всякая аналитическая функция $f(z)$ внутри круга с центром a может быть разложена внутри этого круга в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{0}^{+\infty} A_n (z-a)^n, \tag{3.45}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.46}$$

где Γ — какая-нибудь окружность с центром a, лежащая внутри данного круга.

Этот степенной ряд называется *рядом Тейлора* для $f(z)$ в рассматриваемом круге.

Пусть функция $f(z)$ разложена в круге с центром a в какой-нибудь степенной ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} A_k (z-a)^k$. Пусть Γ—концентрическая окружность меньшего радиуса. Тогда на Γ этот ряд равномерно сходится. Умножая равенство $f(z) = \sum A_k (z-a)^k$ на $\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$, интегрируя затем почленно вдоль Γ и умножая еще на $\frac{1}{2\pi i}$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_k}{2\pi i} \oint_\Gamma (z-a)^{k-n-1}\, dz = A_n,$$

учитывая, что в силу (3.36″),

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (z-a)^{k-n-1} dz = \begin{cases} 0 & k \neq n, \\ 1 & k = n. \end{cases}$$

Этим доказана единственность разложения аналитической функции в круге с центром a в степенной ряд по степеням $z-a$.

Лемма. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D, равная нулю в некоторой области d, содержащейся в D. Тогда $f(z)$ тождественно равна нулю в D.

Сделаем предварительное замечание. Из формулы (3.46) видно, что если функция аналитична внутри некоторого круга K и равна нулю в концентрическом круге k меньшего радиуса (рис. 40), то она равна нулю внутри круга K. В самом деле, взяв Γ лежащим внутри меньшего круга k, найдем по формулам (3.46), что все $A_n = 0$, но тогда по формуле (3.45) $f(z) = 0$ внутри K.

Рассмотрим теперь конечную цепочку лежащих в D кругов

$$K_1, K_2, \ldots, K_n,$$

обладающую тем свойством, что центр каждого круга лежит внутри предыдущего круга, центр первого круга лежит в d, центр последнего круга лежит в произвольно выбранной точке z области D

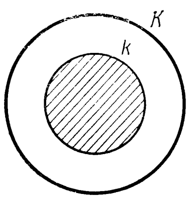


Рис. 40.

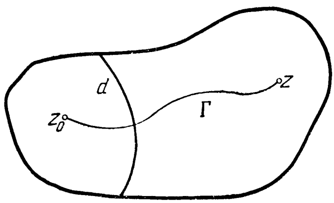


Рис. 41.

Такую цепочку кругов можно, например, построить следующим способом (рис. 41). Соединим точку z_0, принадлежащую области d, спрямляемой дугой Γ с точкой z. Пусть положительное число δ меньше расстояния дуги Γ до границы области D. Разобьем Γ на конечное число частей с длинами, меньшими δ. Тогда цепочка кругов радиуса δ с центрами в точках деления удовлетворяет всем нужным требованиям.

С помощью сделанного выше замечания найдем последовательно, что $f(z)$ равна нулю внутри K_1, внутри $K_2, \ldots$, внутри K_n. Таким образом, для любой точки z области D получим $f(z) = 0$.

Легко видеть, что если $f(z)$ — аналитическая функция в области D, не равная тождественно нулю, то вокруг всякой точки a области D можно описать такой круг, лежащий в D, что внутри этого круга, кроме, может быть, точки a, функция $f(z)$ отлична от нуля.

В самом деле, опишем около точки a круг, лежащий в D. Согласно лемме в этом круге $f(z)$ не может быть тождественно равна нулю. Следовательно, в разложении функции $f(z)$ в этом круге в ряд по степеням $z - a$ не может случиться, что все коэффициенты равны нулю. Пусть в упомянутом разложении $f(z) = \sum\limits_{0}^{+\infty} A_k (z - a)^k$ первый из коэффициентов, отличных от нуля, есть $A_n (n \geqslant 0)$, тогда

$$f(z) = A_n (z-a)^n + A_{n+1} (z-a)^{n+1} + \ldots = (z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = A_n + A_{n+1}(z-a) + \ldots$

Функция $\varphi(z)$ непрерывна в точке a и $\varphi(a) = A_n \neq 0$, следовательно, в достаточно малом концентрическом круге меньшего радиуса $\varphi(z) \neq 0$, а поэтому, за исключением, быть может, точки a, имеем в этом круге $f(z) \neq 0$.

Точка a называется *нулем функции* $f(z)$, если $f(a) = 0$. Из последнего предложения следует, что если $f(z)$, аналитическая в области D, не равна тождественно нулю, то все ее нули в области D *изолированные* (т. е. вокруг каждого из них можно описать такой круг, что других нулей в этом круге не будет). *Кратностью нуля* аналитической функции (не равной тождественно нулю) называется такое n, что разложение в степенной ряд в окрестности рассматриваемого нуля a начинается с n-й степени, иначе говоря, если в окрестности a имеем $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(a) \neq 0$. Нули кратности 1 называются простыми, нули кратности 2 — двойными, нули кратности 3 — тройными.

Теорема единственности. Если в области D даны две аналитические функции, совпадающие на множестве точек, имеющем хотя бы одну предельную точку, лежащую в D, то эти две функции тождественно равны.

В самом деле, пусть a — упомянутая предельная точка. Тогда разность рассматриваемых функций обращается в нуль в точках, находящихся как угодно близко к a и отличных от a, но по доказанному этого не может быть, если рассматриваемые функции не совпадают тождественно.

Формула (3.46) для коэффициентов ряда Тейлора может быть переписана на основании формулы (3.44) в виде

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.47}$$

Оценка модулей коэффициентов ряда Тейлора

Если на окружности Γ модуль функции $f(z)$ не превышает M, то, обозначая через R радиус окружности Γ и оценивая интеграл в формуле (3.46) по правилу оценки модуля интеграла (3.37), получим:

$$|A_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$|A_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.48}$$

Из (3.48) непосредственно вытекает теорема Лиувилля: целая функция (т. е. аналитическая на всей плоскости), ограниченная на всей плоскости, есть постоянная. В самом деле, пусть на всей плоскости

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} A_n z^n; \quad |f(z)| \leqslant M.$$

Тогда при любом R имеем $|A_n| \leqslant \frac{M}{R^n}$, откуда в пределе при $R \to \infty$ найдем (при $n > 0$) $|A_n| \leqslant 0$, т. е. $A_n = 0$. Следовательно, $f(z) = A_0 = \text{const}$.

Из теоремы Лиувилля легко вытекает основная теорема высшей алгебры: всякий полином, отличный от постоянной, имеет по крайней мере один нуль. В самом деле, если бы полином $P(z)$ не имел нулей, то $\frac{1}{P(z)}$ была бы целой функцией. Так как известно, что $P(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $\frac{1}{P(z)} \to 0$ при $z \to \infty$, откуда видно, что $\frac{1}{P(z)}$ будет ограниченной на всей плоскости. Но тогда по теореме Лиувилля $\frac{1}{P(z)} = \text{const}$ и, следовательно, $P(z) = \text{const}$, что противоречит предположению.

§ 15. РЯД ЛОРАНА

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри кольца (рис. 42) между двумя окружностями с центром a (если радиус внутренней окружности равен 0, то кольцо становится кругом с «выколотым» центром; если радиус внешней окружности равен ∞, то кольцо становится внешностью круга; если упомянутое происходит одновременно, то кольцо становится плоскостью с выколотой точкой). Пусть z — точка внутри этого кольца, C и C' — концентрические окружности, лежащие внутри кольца и такие, что z лежит внутри C и вне C'. По формуле Коши для сложного контура

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}.$$

Первое слагаемое правой части на основании выкладок § 14 представляется рядом

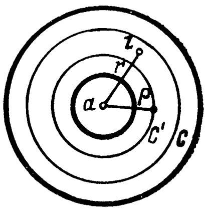


Рис. 42.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{0}^{+\infty}A_n(z-a)^n,$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

причем Γ — какая-нибудь фиксированная концентрическая окружность внутри кольца.

Остается преобразовать второе слагаемое $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}$.

Положим $|z-a|=r$ и радиус круга C' обозначим через ρ. Тогда при ζ на C' имеем:

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-a-(\zeta-a)}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)},$$

и так как $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{\rho}{r}<1$, то последнее выражение можно рассматривать как сумму убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{z-a}$ и знаменателем $\frac{\zeta-a}{z-a}$. Таким образом,

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-a}+\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Сходимость этого ряда — равномерная по ζ на C' (при фиксированном z), так как этот ряд мажорируется числовой убывающей геометрической прогрессией $\sum \frac{\rho^{n-1}}{r^n}$. Умножая на $f(\zeta)$, интегрируя почленно по C' и деля на $2\pi i$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-n}(z-a)^{-n},$$

где

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}}$$

[замена C' на Γ законна, так как $f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}$ аналитична между C' и Γ, включая их].

Складывая разложения

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta},$$

получим разложение $f(z)$ в ряд по целым степеням $z-a$ с показателями $\gtreqless 0$. Этим доказана следующая теорема.

Теорема. Всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри кольца с центром a, может быть разложена внутри этого кольца в ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n, \qquad (3.49)$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \qquad (3.50)$$

где Γ — какая-нибудь окружность с центром a, лежащая внутри данного кольца.

Этот ряд называется *рядом Лорана* для $f(z)$ в рассматриваемом кольце.

Если функция $f(z)$ разложена в кольце с центром a в какой-нибудь ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n,$$

то, рассуждая дословно, как в соответствующем месте § 14, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = A_n,$$

где Γ — окружность с центром a, лежащая внутри кольца.

Этим доказана единственность разложения аналитической функции в кольце с центром a в ряд по целым ($\gtreqless 0$) степеням $z-a$.

Оценка модулей коэффициентов ряда Лорана

Если на окружности Γ, лежащей внутри кольца, модуль функции $f(z)$ не превышает M, то, обозначая через R радиус окружности, получим как при выводе неравенств (3.48) аналогичные неравенства

$$|A_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3.51}$$

§ 16. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Точки, в которых нарушается аналитичность функции, называются *особыми*. Если в достаточной близости к особой точке a нет других особых точек, то особая точка a называется *изолированной особой точкой*. Если a есть изолированная особая точка функции $f(z)$, то в достаточно малом круге с выколотым центром a функция $f(z)$ будет аналитичной и, следовательно, разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k (z-a)^k. \tag{3.52}$$

Логически возможны и исключают друг друга следующие три случая:

1) в разложении (3.52) нет членов с отрицательными показателями;

2) в разложении (3.52) есть лишь конечное число членов с отрицательными показателями;

3) в разложении (3.52) есть бесконечно много членов с отрицательными показателями.

В этих случаях особая точка a называется соответственно 1) *устранимой*; 2) *полюсом*; 3) *существенно особой*.

Члены разложения с отрицательными показателями n составляют *главную часть* $f(z)$ в окрестности особой точки a.

Если a — устранимая, то в окрестности точки a

$$f(z)=\sum_{0}^{+\infty} A_k (z-a)^k;$$

следовательно, после надлежащего доопределения функции в точке a $[f(a)=A_0]$ функция $f(z)$ становится аналитической в точке a и «особенность устраняется». В достаточно малой окрестности устранимой особой точки функция $f(z)$ ограничена. Обратно, если $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности изолированной особой точки a, $|f(z)|\leqslant M$, то эта точка есть устранимая особая. В самом деле, при $n>0$ и достаточно малом R имеем в силу (3.51) $|A_{-n}|\leqslant MR^n$, откуда при $R\to 0$ в пределе получим $|A_{-n}|\leqslant 0$, и, следовательно, $A_{-n}=0$.

Если a — полюс, то в окрестности a имеем:

$$f(z)=\sum_{-n}^{+\infty} A_k (z-a)^k,$$

$A_{-n}\neq 0$, откуда

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

где

$$\varphi(z)=A_{-n}+A_{-n+1}(z-a)+\ldots+A_0(z-a)^n+\ldots$$

есть аналитическая функция в окрестности точки a, причем $\varphi(a)=A_{-n}\neq 0$. Обратно, если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности a и $\varphi(a)\neq 0$, то a есть полюс

n-го порядка для $f(z)$ (n называется *порядком полюса* a, полюсы кратности 1 называются *простыми*, полюсы кратности 2 — *двойными*, полюсы кратности 3 — *тройными*).

Из такого выражения для $f(z)$ следует, что при $z \to a$ имеем $f(z) \to \infty$. Таким образом, при стремлении независимого переменного z к полюсу аналитической функции функция стремится к бесконечности. Легко видеть, что если a есть n-кратный нуль для $f(z)$, то a будет n-кратным полюсом для $\frac{1}{f(z)}$, так как из равенства $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ [где $\varphi(z)$ аналитическая в окрестности a, отличная от нуля в a] следует:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{\varphi(z)}$$

(но $\frac{1}{\varphi(z)}$ аналитическая в окрестности a и отличается от нуля в a).

Если a — существенно особая точка, то в любой окрестности a значения функции $f(z)$ как угодно близко подходят к любому комплексному числу (теорема Сохоцкого). В самом деле, если бы в некоторой окрестности точки a имели $f(z) - A| > \delta$, где $\delta > 0$, то $\frac{1}{f(z)-A}$ была бы ограничена вблизи a и, следовательно, a являлась бы устранимой особой точкой для $\frac{1}{f(z)-A}$, поэтому $\frac{1}{f(z)-A} = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности a, но тогда вокруг a имеем $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$, откуда следует, что a является для $f(z)$ либо устранимой особой точкой [если $\varphi(a) \neq 0$], либо полюсом [если $\varphi(a) = 0$], что противоречит условию.

Справедлива более глубокая теорема Пикара, согласно которой в любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция не только как угодно близко подходит к любому комплексному числу, но принимает все комплексные значения, кроме, быть может, одного.

Если в области D функция $f(z)$ может иметь в качестве особых точек только полюсы, то $f(z)$ называется *мероморфной* в области D. Пусть $f(z)$ мероморфна в области D и

a — какая-нибудь точка этой области. Тогда в окрестности точки a имеем:

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности a и $\varphi(a) \neq 0$. Число n назовем *порядком* функции $f(z)$ в точке a. Если $n > 0$, то a есть нуль n-го порядка для $f(z)$; если $n = 0$, то $f(z)$ не равна нулю в точке a; если $n = -m < 0$, то a есть полюс m-го порядка для $f(z)$. При умножении (делении) мероморфных функций порядки их в каждой точке складываются (вычитаются).

Бесконечно удаленная точка

Если к плоскости комплексного переменного добавить один несобственный элемент, называемый бесконечно удаленной точкой ∞, то получим *полную* плоскость комплексного переменного. Полная плоскость комплексного переменного в известном смысле слова подобна сфере. Это можно видеть с помощью стереографической проекции. Пусть имеем сферу (рис. 43), касающуюся плоскости комплексного переменного в точке 0 (южный полюс). Соединив отрезком прямой северный полюс с точкой z, обозначим через M точку пересечения отрезка со сферой. Если каждому комплексному числу z отнести соответствующую точку M, то между всеми комплексными числами и точками M сферы (кроме северного полюса) будет установлено взаимно однозначное соответствие. Добавляя несобственный элемент ∞ и ставя его в соответствие северному полюсу, получим взаимно однозначное соответствие между точками полной плоскости комплексного переменного и точками сферы.

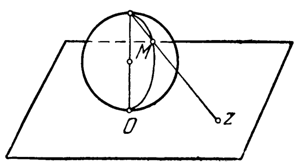


Рис. 43.

Окрестностью бесконечно удаленной точки назовем внешность какого-нибудь круга с центром 0 (чем больше радиус этого круга, тем «меньше» окрестность точки ∞).

Пусть $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда вне некоторого круга с центром 0 она изобразится рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_k z^k. \tag{3.53}$$

Логически возможны и исключают друг друга следующие три случая:

1) в разложении (3.53) нет членов с положительными показателями;

2) в разложении (3.53) есть лишь конечное число членов с положительными показателями;

3) в разложении (3.53) есть бесконечно много членов с положительными показателями.

В этих случаях ∞ называется соответственно: 1) *устранимой особой точкой*; 2) *полюсом*; 3) *существенно особой точкой*. Подстановка $z=\frac{1}{\zeta}$ приводит изучение функции $f(z)$ в окрестности точки ∞ к изучению функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в окрестности точки 0. Поэтому в случае устранимой особой точки ∞ функция $f(z)$ стремится к конечному пределу при $z\to\infty$ (после надлежащего доопределения функции в ∞ функцию следует считать аналитической в окрестности ∞); в случае полюса в ∞ функция $f(z)$ стремится к ∞ при $z\to\infty$; в случае существенно особой точки в ∞ функция $f(z)$ в любой окрестности ∞ как угодно близко подходит к любому комплексному числу.

Если в окрестности ∞

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{-n} A_k z^k=\frac{A_{-n}}{z^n}+\frac{A_{-n-1}}{z^{n+1}}+\ldots,$$

причем $A_{-n}\neq 0$, то ∞ называется *нулем n-го порядка* для $f(z)$.

§ 17. ВЫЧЕТЫ

Пусть a — конечная изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$; тогда в окрестности точки a эта функция изобразится рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n.$$

Коэффициент при (—1)-й степени в этом разложении, т. е. число A_{-1}, называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно особой точки a. Вычет $f(z)$ относительно a можно обозначать знаком $\operatorname{Res}\limits_{a} f(z)$.

Из формулы (3.50) при $n = -1$ найдем:

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz, \tag{3.54}$$

где γ — достаточно малая окружность с центром a.

Основная теорема о вычетах

Если функция $f(z)$ аналитична внутри замкнутого контура C и на нем, за исключением конечного числа точек внутри C, то $\oint\limits_{C} f(z)\, dz$ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно особых точек $f(z)$, лежащих внутри C.

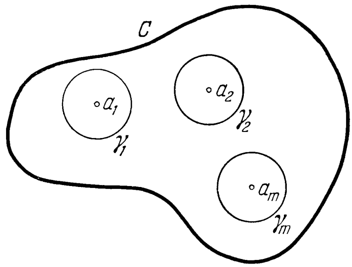


Рис. 44.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (рис. 44) — особые точки $f(z)$, лежащие внутри C, и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — вычеты $f(z)$ относительно них. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — окружности вокруг этих точек, лежащие внутри C и вне друг друга. Тогда по теореме Коши для сложного контура и в силу формулы (3.54) получим:

$$\oint\limits_{C} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz + \ldots + \oint\limits_{\gamma_m} f(z)\, dz = 2\pi i (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для вычисления интеграла вдоль замкнутого контура C достаточно знать вычеты функции относительно особых точек, лежащих внутри C.

Вычисление вычета относительно простого полюса

Пусть $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналитичны в окрестности a и точка a есть простой нуль для $\psi(z)$. Тогда a будет простым полюсом для $f(z)$ [если $\varphi(a)\neq 0$]. Имеем $\psi(z)=(z-a)\psi_1(z)$, где $\psi_1(z)$ аналитична в окрестности a и $\psi_1(a)\neq 0$. Тогда в окрестности точки a функция $\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)}$ аналитична и

$$\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots;$$

следовательно, вблизи точки a

$$f(z)=\frac{1}{z-a}\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)}=\frac{\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}}{z-a}+B_1+B_2(z-a)+\ldots,$$

откуда

$$\operatorname*{Res}_a f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}. \tag{3.55'}$$

Но $\psi'(z)=\psi_1(z)+(z-a)\psi_1'(z)$; $\psi'(a)=\psi_1(a)$; следовательно,

$$\operatorname*{Res}_a f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.55}$$

Примеры.

$$\operatorname{Res}\operatorname{ctg} z=\operatorname*{Res}_{\pi}\frac{\cos z}{\sin z}=\left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=\pi}=1;$$

$$\operatorname*{Res}_a\frac{e^z}{z^2-a^2}=\left[\frac{e^z}{2z}\right]_{z=a}=\frac{e^a}{2a}.$$

Вычеты логарифмической производной мероморфной функции

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. Тогда логарифмическая производная $\frac{f'(z)}{f(z)}$ будет также мероморфной, причем нули и полюсы $f(z)$ будут простыми полюсами для $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

В самом деле, имеем в окрестности точки a:

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z);$$

$\varphi(z)$ аналитична, $\varphi(a)\neq 0$;

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z);$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Следовательно (учитывая аналитичность второго слагаемого правой части в окрестности a),

$$\operatorname*{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)}=n.$$

Таким образом, вычет логарифмической производной равен порядку данной функции в этой точке. Из этого замечания и из основной теоремы о вычетах вытекает (учитывая, что порядок в нуле n-го порядка равен n, порядок в полюсе m-го порядка равен $-m$) следующая теорема.

Теорема о логарифмических вычетах. Если $f(z)$ мероморфна внутри замкнутого контура и на нем, причем на контуре не имеет нулей и полюсов, то интеграл

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

равен произведению $2\pi i$ на разность между числом нулей функции $f(z)$, лежащих внутри C (считая каждый нуль столько раз, какова его кратность), и числом полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри C (считая каждый полюс столько раз, какова его кратность).

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P, \tag{3.56}$$

где N — сумма кратностей нулей функции $f(z)$, лежащих внутри C; P — сумма кратностей полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри C.

Формула (3.56) легко обобщается. Заметим сперва, что если a — простой полюс для $\psi(z)$ и $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки a, то

$$\operatorname*{Res}_a[\varphi(z)\psi(z)]=\varphi(a)\operatorname*{Res}_a\psi(z). \tag{3.55''}$$

В самом деле, в окрестности точки a имеем:

$$\psi(z) = \frac{\psi_1(z)}{z-a},$$

где $\psi_1(z)$ аналитична в окрестности a,

$$\varphi(z)\psi(z) = \frac{\varphi(z)\psi_1(z)}{z-a}; \quad \operatorname*{Res}_a \psi(z) = \psi_1(a);$$

$$\operatorname*{Res}_a [\varphi(z)\psi(z)] = \varphi(a)\psi_1(a);$$

следовательно, равенство (3.55″) справедливо.

Пусть $f(z)$ удовлетворяет отмеченным выше условиям и $\varphi(z)$ — какая-нибудь аналитическая функция в области, ограниченной контуром C, и на нем. Так как каждая особая точка логарифмической производной мероморфной функции есть простой полюс, то для всякой точки a, являющейся нулем или полюсом $f(z)$, имеем:

$$\operatorname*{Res}_a \left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = \varphi(a)\operatorname*{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n\varphi(a),$$

где n — порядок $f(z)$ в точке a. Поэтому из основной теоремы о вычетах следует, что если a_k — нули $f(z)$, лежащие внутри C, m_k — кратности их, b_l — полюсы $f(z)$, лежащие внутри C, n_l — кратности их, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_k m_k\varphi(a_k) - \sum_l n_l\varphi(b_l). \qquad (3.56')$$

При $\varphi(z) \equiv 1$ эта формула обращается в (3.56).

Вычисление вычета относительно кратного полюса

Пусть a есть n-кратный полюс для $f(z)$. Тогда в окрестности точки a имеем

$$f(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + \varphi(z)$$

[где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки a]; отсюда

$$(z-a)^n f(z) = A_{-n} + \ldots + A_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n\varphi(z)$$

в окрестности точки a. Дифференцируя это равенство $n-1$ раз; получаем:

$$[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)} = (n-1)!\,A_{-1} + [(z-a)^n \varphi(z)]^{(n-1)}.$$

Но для последнего слагаемого точка a является нулем, так как для $(z-a)^n\varphi(z)$ точка a является нулем кратности не ниже n (при каждом дифференцировании кратность нуля понижается на единицу), следовательно, в пределе при $z \to a$ получим:

$$\lim_{z\to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)} = (n-1)!\,A_{-1},$$

откуда

$$A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Таким образом, если a есть n-кратный полюс для $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}. \qquad (3.57)$$

Из этой формулы при $n=1$ легко получить выведенную ранее формулу (3.55) для вычисления вычета относительно простого полюса.

Пример.

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left[\frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n}\right]^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\dots(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!\,(2i)^{2n-1}} = \frac{1}{i}\,\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}. \qquad (3.57')$$

Приложение вычетов к вычислению несобственных интегралов

Пусть $f(z)$ — функция, имеющая выше действительной оси лишь конечное число особых точек $a, b, \dots, k$ (рис. 45) и не имеющая особых точек на действительной оси. При R, достаточно большом, точки $a, b, \dots, k$ будут лежать внутри верхнего полукруга радиуса R с центром 0. Имеем (C обозначает контур полукруга):

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,[\operatorname*{Res}_a f(z) + \operatorname*{Res}_b f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_k f(z)]; \qquad (3.58')$$

но

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz,$$

где γ_R — верхняя полуокружность радиуса R с центром 0.

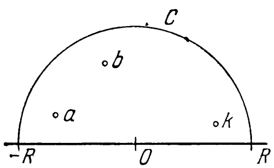


Рис. 45.

Если при $z \to \infty$ (в верхней полуплоскости) $f(z)$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{z}$, т. е. если $f(z) = \frac{\alpha(z)}{z}$, где $\alpha(z) \to 0$ при $z \to \infty$ (в верхней полуплоскости), то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

В самом деле, для всякого ε найдется такое $A > 0$, что при $|z| > A$, $y \geqslant 0$ $(z = x + iy)$ имеем $|\alpha(z)| < \varepsilon$. Тогда

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_R} \frac{\alpha(z)}{z}\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R}\pi R = \pi\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, из (3.58′) в пределе при $R \to +\infty$ получим $\left(\text{понимая } \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ как } \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\right)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,[\operatorname*{Res}_a f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_k f(z)]. \qquad (3.58)$$

Итак, если $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, за исключением конечного числа особых точек, лежащих выше действительной оси, и если при $z \to \infty$ (в верхней полуплоскости) $f(z)$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{z}$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ относительно особых точек, лежащих в верхней полуплоскости.

В частности, если $f(z)$ имеет в ∞ нуль кратности $\geqslant 2$, не имеет особых точек на действительной оси и имеет только конечное число особых точек выше действительной оси, то формула (3.58) применима.

В частности, (3.58) применима, если $f(z)$ есть рациональная дробь, в которой знаменатель не имеет действительных корней и степень знаменателя превышает степень числителя более чем на единицу.

Пример 1. Найти $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$. Корни знаменателя суть $\pm 1 \pm i$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{1+i} \frac{1}{z^4+4} + \operatorname*{Res}_{-1+i} \frac{1}{z^4+4}\right) =$$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=1+i} + \left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=-1+i}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{z}{4z^4}\right)_{z=1+i} + \left(\frac{z}{4z^4}\right)_{z=-1+i}\right] = 2\pi i\left(\frac{1+i}{-16} + \frac{-1+i}{-16}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Найти $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. Корни знаменателя суть $\pm i$ (кратности n), следовательно, учитывая (3.57′), получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{(z^2+1)^n} =$$

$$= \pi \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\,[(n-1)!]^2} = \pi \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4 \ldots (2n-2)}.$$

Приложение основной теоремы Коши к вычислению несобственных интегралов

Не останавливаясь на общих соображениях, вычислим в качестве примера такого приложения интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx; \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$$

Рассмотрим целую функцию e^{iz^2}. По теореме Коши интеграл по всякому спрямляемому замкнутому контуру от этой функции равен нулю; в частности, равен нулю интеграл по контуру сектора AOB (рис. 46). Следовательно,

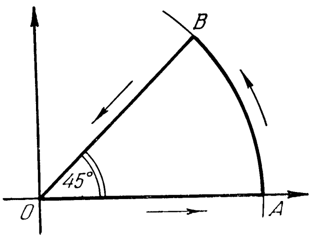


Рис. 46.

$$\int_{OABO} e^{iz^2}\,dz = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = 0.$$

Имеем

$$\int_{OA} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx.$$

Комплексное параметрическое уравнение дуги AB есть $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$; следовательно,

$$\int_{AB} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\varphi}} iRe^{i\varphi}\,d\varphi = iR\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\varphi + i(R^2\cos 2\varphi + \varphi)}\,d\varphi,$$

откуда (учитывая неравенство $\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\left|\int_{AB} e^{iz^2}\,dz\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\varphi}\,d\varphi < R\int_0^{+\infty} e^{-\frac{4R^2\varphi}{\pi}}\,d\varphi = \frac{\pi}{4R}$$

и поэтому $\int_{AB} e^{iz^2}\,dz \to 0$ при $R \to \infty$.

Комплексное параметрическое уравнение отрезка OB есть

$$z = \rho e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R;$$

следовательно,

$$\int\limits_{OB} e^{iz^2}\, dz = e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_0^R e^{-\rho^2}\, d\rho,$$

откуда [считая известной формулу (4.10) главы IV]

$$\int\limits_{OB} e^{iz^2}\, dz \to e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \text{ при } R \to \infty.$$

Из сказанного заключаем, что, переходя в равенстве

$$\int\limits_{OABO} e^{iz^2}\, dz = 0$$

к пределу при $R \to \infty$, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i), \qquad (3.59)$$

причем попутно устанавливается сходимость этого несобственного интеграла.

Отсюда, переходя к сопряженным величинам, найдем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ix^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i). \qquad (3.59')$$

Отделяя действительную и мнимую части в (3.59), получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad (3.60)$$

откуда (вследствие четности подынтегральных функций)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (3.60')$$

§ 18. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, и на нем, не имеющая нулей и полюсов на C. Так как

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Ln} f(z),$$

то

$$\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = [\operatorname{Ln} f(z)]_C,$$

где правая часть обозначает приращение, которое получает $\operatorname{Ln} f(z)$, когда точка z описывает контур C в положительном направлении. Но

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$$

и $\ln|f(z)|$, как непрерывная однозначная функция, после обхода C возвращается к своему первоначальному значению, поэтому

$$[\operatorname{Ln} f(z)]_C = i\,[\operatorname{Arg} f(z)]_C$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}[\operatorname{Arg} f(z)]_C.$$

С другой стороны, по теореме о логарифмических вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

где N — число нулей и P — число полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри C (с учетом их кратностей). Таким образом, получается правило, известное под названием *принципа аргумента*.

Если $f(z)$ мероморфна в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, и на нем и если $f(z)$ не имеет на этом контуре нулей и полюсов, то разность между числом нулей и числом полюсов (с учетом их кратностей) функции $f(z)$, лежащих внутри C, равна полному числу оборотов вокруг нуля, совершаемых вектором точки $f(z)$, когда точка z описывает контур C в положительном направлении, т. е.

$$N-P=\frac{1}{2\pi}[\operatorname{Arg} f(z)]_C. \tag{3.61}$$

С помощью принципа аргумента легко доказывается

Теорема Руше. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические функции в области, ограниченной контуром C, и на нем и во всех точках контура C выполняется неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$, то $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей (считая каждый нуль столько раз, какова его кратность).

Доказательство. Из условия теоремы видно, что $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ не имеют нулей на C, ибо при z на C имеем $|f(z)|>|\varphi(z)|\geqslant 0$; $|f(z)+\varphi(z)|\geqslant|f(z)|-|\varphi(z)|>0$.

Пусть N — число нулей функции $f(z)$, лежащих внутри C, $\tilde{N}$ — число нулей функции $f(z)+\varphi(z)$, лежащих внутри C. По принципу аргумента имеем:

$$\tilde{N}=\frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg}[f(z)+\varphi(z)]\}_C=\frac{1}{2\pi}\left\{\operatorname{Arg}\left[f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]\right\}_C=$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\operatorname{Arg} f(z)]_C+\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{Arg}\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]_C=\frac{1}{2\pi}[\operatorname{Arg} f(z)]_C=N,$$

учитывая, что $\left[\operatorname{Arg}\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]_C=0$, ибо, когда точка z описывает C, точка $1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ описывает путь, лежащий внутри круга радиуса 1 с центром 1 (рис. 47), так как на C $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$, что и требовалось доказать.

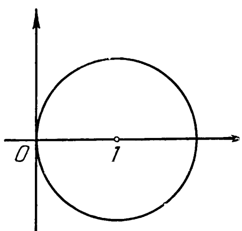


Рис. 47.

Отметим некоторые следствия из теоремы Руше.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области, ограниченной замкнутым контуром C, и на нем, не имеющая нулей на C. Тогда, если $f_n(z)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ аналитические функции в области, ограниченной контуром C, и на нем и $f_n(z)\to f(z)$ равномерно на C, то при n, достаточно большом, число нулей (с учетом их кратностей) функции

$f_n(z)$ внутри C равно числу нулей (с учетом их кратностей) функции $f(z)$ внутри C (теорема Гурвица).

В самом деле, очевидно, $m = \min\limits_C |f(z)| > 0$, ибо $f(z)$ не имеет нулей на C, поэтому найдется такой номер N, что при $n > N$ и z на C будем иметь $|f_n(z) - f(z)| < m$, но тогда в разложении $f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$ модуль второго слагаемого правой части будет меньше модуля первого для всех z на C, и, следовательно, по теореме Руше число нулей $f_n(z)$ внутри C будет равно числу нулей $f(z)$ внутри C, что и требовалось доказать.

Пусть a — какое-нибудь комплексное число. a-точками функции $f(z)$ называются такие значения z, для которых значение $f(z)$ равно a. Иначе говоря, a-точки функции $f(z)$ суть нули функции $f(z) - a$. Так как нули аналитической функции, не равной тождественно нулю, изолированы, то a-точки аналитической функции, не равной тождественно a, изолированы. Говорят еще, что a-точка функции $f(z)$ имеет кратность n, если она есть n-кратный нуль для $f(z) - a$.

Пусть $f(z)$ — непостоянная аналитическая функция и z_0 — n-кратная a-точка этой функции. Так как a-точки изолированы, то на окружности γ достаточно малого радиуса с центром z_0 и внутри нее не будет находиться других a-точек. Тогда $m = \min\limits_\gamma |f(z) - a| > 0$. Если $|b - a| < m$, то внутри γ будет находиться (с учетом их кратностей) ровно n b-точек функции $f(z)$. Действительно, $f(z) - b = [f(z) - a] + (a - b)$, причем на γ имеем $|a - b| < |f(z) - a|$, следовательно, по теореме Руше число нулей (с учетом их кратностей) функции $f(z) - b$ внутри γ совпадает с таковым для $f(z) - a$ и, следовательно, равно n (внутри γ функция $f(z) - a$ имеет только один нуль, z_0, и его кратность равна n). Заметим еще, что если, кроме того, радиус ρ окружности γ достаточно мал (чтобы $f'(z) \neq 0$ при $0 < |z - z_0| < \rho$), то $f(z)$ обращается внутри γ ровно n раз в b и все эти b-точки — простые (однократные).

Непостоянная аналитическая функция $f(z)$ переводит открытые множества в открытые. В самом деле, если $f(z_0) = w_0$, то в силу вышеизложенного уравнение $f(z) = w_1$ имеет внутри как угодно малого круга с центром z_0 решение, если только w_1 достаточно близко к w_0.

Из последнего замечания следует, что если $f(z)$ — непостоянная аналитическая функция в некоторой области, то в любой близости к каждой точке z_0 этой области найдется такая точка z_1, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. Отсюда вытекает *принцип максимума модуля*: если $f(z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области и аналитична внутри этой области, то $|f(z)|$ достигает своего наибольшего значения на границе области.

Из принципа максимума модуля непосредственно вытекает теорема: если последовательность функций $f_n(z)$, непрерывных в ограниченной замкнутой области и аналитических внутри этой области, равномерно сходится на границе области, то она равномерно сходится на всей области. В самом деле, так как сходимость на границе — равномерная, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$, $p > 0$ будем иметь $|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ для всех z на границе области, но тогда по принципу максимума модуля это неравенство справедливо на всей области и, следовательно, в силу критерия Коши последовательность $f_n(z)$ равномерно сходится на всей области.

§ 19. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Соответствие, по которому каждому элементу a множества A относится некоторый элемент b множества B (природа элементов множеств A и B безразлична), называется отображением множества A в множество B. Элемент b, соответствующий a, называется *образом* элемента a (тогда a называют *прообразом* элемента b).

Отображение, дифференцируемое в данной точке

Мы будем рассматривать отображение области D плоскости комплексного переменного в плоскость комплексного переменного. Такое отображение можно записать формулой $w = f(z)$, где $f(z)$ — комплекснозначная функция комплексного переменного z, определенная в области D. Его можно также записать формулами

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительная и мнимая части $f(x+iy)$.

Определение. Отображение $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$ называется *дифференцируемым* в данной точке рассматриваемой области, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в этой точке.

Таким образом, дифференцируемость отображения в точке (x, y) означает возможность представлений (о полном дифференциале функций двух действительных переменных см. § 6):

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= A\,\Delta x + B\,\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \\ \Delta v &= C\,\Delta x + D\,\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \end{aligned}\right\} \quad (3.62)$$

где ε_1 и ε_2 стремятся к нулю при $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ и где A, B, C, D — некоторые действительные числа (эти числа однозначно определены, причем $A = \frac{\partial u}{\partial x}$, $B = \frac{\partial u}{\partial y}$, $C = \frac{\partial v}{\partial x}$, $D = \frac{\partial v}{\partial y}$).

Дифференцируемое в точке (x, y) отображение называется *невырождающимся* в этой точке, если $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$.

Лемма. Если отображение, дифференцируемое и невырождающееся в точке M, переводит точку M в точку N, то точки, достаточно близкие к M и отличные от M, перейдут в точки, отличные от N.

Доказательство. Правило Крамера показывает, что если ξ, η определить как функции от α, β из линейной системы

$$A\xi + B\eta + \alpha = 0,$$
$$C\xi + D\eta + \beta = 0,$$

то при $\begin{cases} \alpha \to 0, \\ \beta \to 0 \end{cases}$ будем иметь $\xi^2 + \eta^2 \to 0$, поэтому найдется такое число $\sigma > 0$, что при $\begin{cases} |\alpha| < \sigma, \\ |\beta| < \sigma \end{cases}$ выполняется неравенство $\xi^2 + \eta^2 < 1$.

Выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы при $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ выполнялись неравенства

$$|\varepsilon_1| < \sigma, \quad |\varepsilon_2| < \sigma.$$

Тогда при $0 < \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ числа Δu, Δv одновременно не обращаются в нуль. Действительно, в противном случае числа $\xi = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $\eta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ удовлетворяли бы системе

$$\left.\begin{aligned} A\xi + B\eta + \varepsilon_1 = 0, \\ C\xi + D\eta + \varepsilon_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

где

$$|\varepsilon_1| < \sigma, \quad |\varepsilon_2| < \sigma, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

что противоречит определению числа σ.

Пусть отображение $w = f(z)$ дифференцируемо и не вырождается в точке z. Тогда в силу леммы найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |\Delta z| < \delta$ будем иметь $|\Delta w| \neq 0$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta z &= r\gamma \quad (r > 0;\ \gamma = \alpha + i\beta;\ |\gamma| = 1), \\ \Delta w &= \rho\lambda \quad (\rho > 0;\ \lambda = \mu + i\nu;\ |\lambda| = 1). \end{aligned}$$

Из (3.62) следует:

$$\left.\begin{aligned} \rho\mu = Ar\alpha + Br\beta + r\varepsilon_1, \\ \rho\nu = Cr\alpha + Dr\beta + r\varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1(r\alpha, r\beta), \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2(r\alpha, r\beta). \end{aligned}$$

Возводя в квадрат и складывая, получим:

$$\rho^2 = r^2[(A\alpha + B\beta + \varepsilon_1)^2 + (C\alpha + D\beta + \varepsilon_2)^2],$$

$$\frac{\rho}{r} = \sqrt{(A\alpha + B\beta + \varepsilon_1)^2 + (C\alpha + D\beta + \varepsilon_2)^2}.$$

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$; $|\zeta| = 1$. Тогда

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ \gamma \to \zeta}} \frac{\rho}{r} = \sqrt{(A\xi + B\eta)^2 + (C\xi + D\eta)^2} = p(\zeta), \tag{3.64}$$

причем стремление $\frac{\rho}{r}$ к $p(\zeta)$ равномерное относительно ζ.

Эту непрерывную положительную функцию $p(\zeta)$ от комплексного числа ζ с единичным модулем назовем *индикатрисой растяжений* рассматриваемого отображения в точке z.

Далее, умножая второе из равенств (3.63) на i и складывая с первым, получим:

$$\rho\lambda = r\,[(A+iC)\,\alpha + (B+iD)\,\beta + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2].$$

Отсюда, учитывая (3.64), найдем:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \gamma\to\zeta}} \lambda = \frac{(A+iC)\,\xi + (B+iD)\,\eta}{p(\zeta)} = q(\zeta), \tag{3.65}$$

причем стремление λ к $q(\zeta)$ — равномерное относительно ζ. Эту непрерывную функцию $q(\zeta)$ от комплексного числа ζ с единичным модулем, значения которой суть комплексные числа с единичным модулем, назовем *индикатрисой вращений* рассматриваемого отображения в точке z.

Пусть S — произвольное отображение области D плоскости комплексного переменного в плоскость комплексного переменного, переводящее точку M в точку N. Обозначим через M_1 переменную точку области D, отличную от M, и через N_1 ту точку, в которую переходит M_1 при отображении S.

Пусть m — «направление», выходящее из точки M. Будем говорить, что отображение S имеет в точке M по «направлению» m *коэффициент искажения масштаба* $\varkappa$, если (рис. 48)

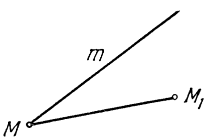


Рис. 48.

$$\text{при } \begin{cases} M_1 \to M, \\ (\widehat{MM_1,\, m}) \to 0 \end{cases} \quad \text{имеем} \quad \frac{NN_1}{MM_1} \to \varkappa.$$

В частности, если функция, осуществляющая отображение S, непрерывна в окрестности точки M и если S имеет в точке M по «направлению» m коэффициент искажения масштаба $\varkappa$, то всякая дуга, выходящая из M и касающаяся в этой точке луча m, переходит в некоторую дугу, выходящую из N, причем отношение хорд $\frac{NN_1}{MM_1}$ стремится к $\varkappa$, когда длина хорды MM_1 стремится к нулю (рис. 49).

Если S таково, что при M_1, достаточно близкой к M, точка N_1 отлична от точки N, то будем говорить, что отображение S *переводит «направление»* m, *выходящее из* M, *в «направление»* n, *выходящее из* N, если (рис. 50)

$$\text{при } \begin{cases} M_1 \to M, \\ (\widehat{MM_1, m}) \to 0 \end{cases} \text{ имеем } (\widehat{NN_1, n}) \to 0.$$

В частности, если функция, осуществляющая отображение S, непрерывна в окрестности точки M и если S пере-

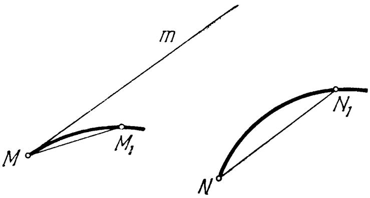


Рис. 49.

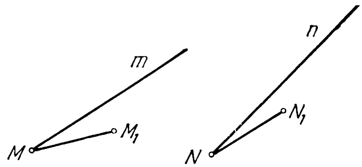


Рис. 50.

водит «направление» m, выходящее из точки M, в «направление» n, выходящее из точки N, то (рис. 51) всякая дуга, выходящая из M и касающаяся в этой точке луча m, переходит в некоторую дугу, выходящую из N и касающуюся в этой точке луча n.

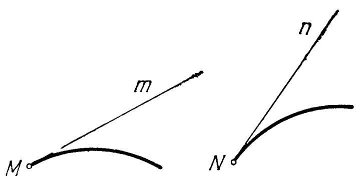


Рис. 51.

Изложенное выше показывает, что если отображение S дифференцируемо и не вырождается в точке M, то S имеет в точке M по каждому «направлению» m положительный коэффициент искажения масштаба и каждое «направление» m, выходящее из M, переводится в некоторое «направление» n, выходящее из N. Именно, по «направлению» m, образующему с действительной осью угол a, коэффициент искажения масштаба равен $p(e^{ia})$ и «направление» m переводится в «направление» n, образующее с действительной осью угол b, определяемый из равенства $e^{ib} = q(e^{ia})$.

Отображение, конформное в данной точке

Теорема. Чтобы дифференцируемое и невырождающееся в данной точке отображение имело в этой точке постоянную индикатрису растяжений, необходимо и достаточно,

$$\text{чтобы} \begin{cases} A=D, \\ B=-C \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} A=-D, \\ B=C. \end{cases}$$

Доказательство. Если $p(\zeta)=\text{const}=p$, то

$$(A\xi+B\eta)^2+(C\xi+D\eta)^2=p^2=p^2(\xi^2+\eta^2)$$

при $\xi^2+\eta^2=1$. Умножая это равенство на любое $R\geqslant 0$ и полагая $X=R\xi$, $Y=R\eta$, получим тождество

$$(AX+BY)^2+(CX+DY)^2=p^2(X^2+Y^2)$$

или

$$(A^2+C^2-p^2)X^2+2(AB+CD)XY+$$
$$+(B^2+D^2-p^2)Y^2=0;$$

следовательно, все коэффициенты этой квадратичной формы должны быть равны нулю, откуда $A^2+C^2=B^2+D^2$, $AB+CD=0$ или

$$A^2-B^2=D^2-C^2,$$
$$AB=-CD.$$

Умножая второе равенство на $2i$ и складывая с первым, получим:

$$(A+iB)^2=(D-iC)^2,$$
$$A+iB=\pm(D-iC).$$

Следовательно, либо $\begin{cases} A=D, \\ B=-C, \end{cases}$ либо $\begin{cases} A=-D, \\ B=C. \end{cases}$

Обратно, пусть $\begin{cases} A=\pm D, \\ B=\mp C; \end{cases}$ тогда

$$(A\xi+B\eta)^2+(C\xi+D\eta)^2=$$
$$=(A\xi\mp C\eta)^2+(C\xi\pm A\eta)^2=A^2+C^2$$

при

$$\xi^2+\eta^2=1.$$

Следовательно,

$$p(\zeta)=\sqrt{A^2+C^2}=\text{const}=p,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если индикатриса растяжений постоянна, то индикатриса вращений имеет вид $k\zeta$ или $k\bar{\zeta}$ (k постоянно; $|k|=1$). Обратно, если индикатриса вращений имеет вид $k\zeta$ или $k\bar{\zeta}$ (k постоянно), то индикатриса растяжений постоянна.

В самом деле, если $p(\zeta)=\text{const}=p$, то по предыдущей теореме имеем $\begin{cases} A=\pm D, \\ B=\mp C, \end{cases}$ и поэтому

$$(A+iC)\xi+(B+iD)\eta=(A+iC)\xi+(\mp C\pm iA)\eta=$$
$$=(A+iC)(\xi\pm i\eta);$$

следовательно, $q(\zeta)=k\zeta$ или $q(\zeta)=k\bar{\zeta}$, где $k=\dfrac{A+iC}{p}$, $|k|=1$. Обратно, если $q(\zeta)=k\zeta$ или $q(\zeta)=k\bar{\zeta}$, где $k=\text{const}=k_1+ik_2$, то, сравнивая действительные и мнимые части в равенстве

$$(A+iC)\xi+(B+iD)\eta=p(\zeta)(k_1+ik_2)(\xi\pm i\eta)$$

и рассматривая получающиеся соотношения как линейную однородную систему относительно ξ, η (которые одновременно не обращаются в нуль), заключаем, что ее определитель равен нулю. Это значит, что $F[p(\zeta)]=0$, где

$$F(p)=\begin{vmatrix} A-k_1p & B\pm k_2p \\ C-k_2p & D\mp k_1p \end{vmatrix},$$

и таким образом значениями непрерывной функции $p(\zeta)$ могут быть лишь корни полинома второй степени $F(p)$; следовательно, $p(\zeta)$ тождественно равно одному из этих корней.

Определение. Дифференцируемое и невырождающееся в данной точке отображение называется *конформным* в данной точке, если в этой точке индикатриса растяжений постоянна (эта постоянная называется *коэффициентом искажения масштаба* в данной точке).

В силу предыдущего замечания индикатриса вращения конформного в данной точке отображения либо имеет вид $k\zeta$ (тогда отображение называется конформным 1-го рода в рассматриваемой точке), либо имеет вид $k\bar{\zeta}$ (тогда отображение называется конформным 2-го рода в рассматриваемой точке).

Остановимся на геометрическом смысле введенных понятий. Пусть отображение $w = f(z)$, конформное в точке M, переводит точку M в точку N. Тогда (учитывая, что предельный переход в (3.64) равномерен относительно ζ) $\frac{NN_1}{MM_1} \to p$ при $M_1 \to M$ (рис. 52), где p — коэффициент искажения масштаба в точке M.

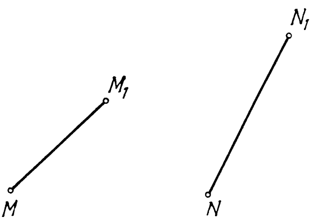


Рис. 52.

Пусть m_1 и m_2 — какие-нибудь «направления», выходящие из M под углами a_1 и a_2 к действительной оси. Им соответствуют «направления» n_1 и n_2, выходящие из N под некоторыми углами b_1 и b_2 к действительной оси. В случае $q(\zeta) = k\zeta$ получаем (полагая $k = e^{ic}$):

$$e^{ib_1} = e^{i(c+a_1)},$$
$$e^{ib_2} = e^{i(c+a_2)},$$
$$e^{i(b_2-b_1)} = e^{i(a_2-a_1)},$$

поэтому (при надлежащем выборе b_2)

$$b_2 - b_1 = a_2 - a_1$$

или (рис. 53)

$$(\widehat{n_1, n_2}) = (\widehat{m_1, m_2}).$$

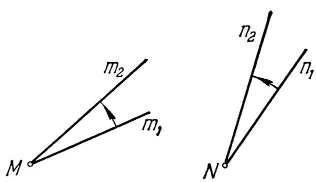


Рис. 53.

Это показывает, что при конформном отображении 1-го рода углы между «направлениями» сохраняют величину и ориентацию. В случае $q(\zeta) = k\bar{\zeta}$ получим (полагая $k = e^{ic}$):

$$e^{ib_1} = e^{i(c-a_1)},$$
$$e^{ib_2} = e^{i(c-a_2)},$$
$$e^{i(b_2-b_1)} = e^{i(a_1-a_2)},$$

поэтому (при надлежащем выборе b_2)

$$b_2 - b_1 = a_1 - a_2$$

или (рис. 54)

$$(\widehat{n_1, n_2}) = (\widehat{m_2, m_1}).$$

Это показывает, что при конформном отображении 2-го рода углы между «направлениями» сохраняют величину, но ме-

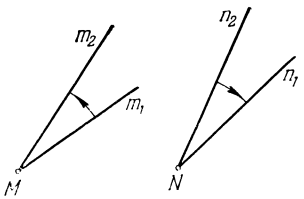


Рис. 54.

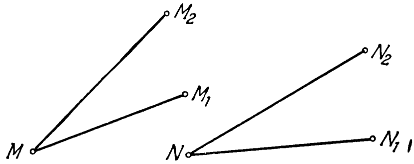


Рис. 55.

няют ориентацию. Наконец (учитывая, что предельный переход в (3.65) равномерен относительно ζ), находим, что (рис. 55)

$$(\widehat{NN_1, NN_2}) \to \pm\varphi$$

$$\text{при } \begin{cases} M_1 \to M, \\ M_2 \to M, \\ (\widehat{MM_1, MM_2}) \to \varphi \end{cases}$$

(верхний знак — для конформного отображения 1-го рода, нижний — для конформного отображения 2-го рода).

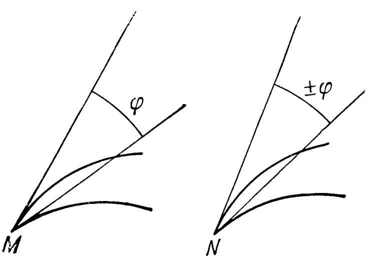


Рис. 56.

В частности, если $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки M, то в случае конформного отображения 1-го рода (2-го рода) в точке M две дуги, выходящие из M (рис. 56) и пересекающиеся в этой точке под углом φ, переходят в две дуги, выходящие из N и пересекающиеся в этой точке под углом $\varphi\,(-\varphi)$.

Заметим теперь, что условия

$$\begin{cases} A=D, \\ B=-C \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A=-D, \\ B=C \end{cases}$$

являются условиями Коши — Римана соответственно для $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ и что при $\begin{cases} A=\pm D, \\ B=\mp C \end{cases}$ условие невырождения отображения состоит в том, чтобы A и C одновременно не обращались в нуль, так как

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mp C \\ C & \pm A \end{vmatrix} = \pm (A^2+C^2).$$

Поэтому из предыдущей теоремы и результатов § 6 непосредственно вытекает

Теорема. Для того чтобы отображение $w=f(z)$ было конформным 1-го рода (2-го рода) в данной точке, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ $(\overline{f(z)})$ была дифференцируема в этой точке и имела в ней производную, отличную от нуля

Пусть $f(z)$ дифференцируема в данной точке z и в этой точке $f'(z) \neq 0$, тогда отображение $w=f(z)$ будет конформным 1-го рода в точке z, причем

$$p=\sqrt{A^2+C^2}=|A+iC|=|f'(z)|;$$

$$k=\frac{A+iC}{p}=\frac{f'(z)}{|f'(z)|}=e^{i \operatorname{Arg} f'(z)}.$$

Таким образом выявляются:

1) геометрический смысл модуля производной:

Если в данной точке $f'(z) \neq 0$, то $|f'(z)|$ есть коэффициент искажения масштаба в этой точке отображения $w=f(z)$;

2) геометрический смысл аргумента производной:

Если в данной точке $f'(z) \neq 0$, то $\operatorname{Arg} f'(z)$ есть угол, на который поворачиваются все «направления», выходящие из этой точки при отображении $w=f(z)$.

В дальнейшем конформное отображение 1-го рода будем просто называть конформным.

Примечание. Если рассматривать отображение $w = f(z)$ области D полной плоскости комплексного переменного в полную плоскость комплексного переменного, переводящее точку z_0 в точку w_0, то данное ранее определение конформности отображения в точке z_0 теряет смысл, если хотя бы одна из точек z_0, w_0 есть ∞. Если z_0 конечно, $w_0 = \infty$, то отображение $w = f(z)$ называется конформным в точке z_0, когда отображение $w = \frac{1}{f(z)}$ конформно в точке z_0. Если $z_0 = \infty$, то отображение $w = f(z)$ называется конформным в точке z_0, когда отображение $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформно в точке 0. Пользуясь отображением $w = \frac{1}{z}$, можно говорить о «направлениях», выходящих из точки $z = \infty$ при помощи соответствующих «направлениий», выходящих из точки $w = 0$. Заметим еще, что с помощью стереографической проекции (см. § 16) точку ∞ можно сделать равноправной с конечными точками.

§ 20. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ

Общие замечания о действиях над отображениями

Пусть S — отображение множества A в множество B, T — отображение множества B в множество C (природа элементов всех этих множеств безразлична). Тогда *произведение* TS отображений S и T определяется как такое отображение множества A в множество C, которое является результатом последовательного выполнения S и T. Это значит, что $(TS)(a) = T[S(a)]$ для всякого a из A. Произведение отображений обладает сочетательным свойством

$$U(TS) = (UT)S.$$

Если S — взаимно однозначное отображение множества A на множество B (это значит, что каждый элемент из B имеет ровно один прообраз в A), то можно говорить об *обратном* отображении S^{-1} множества B на множество A (если каждому элементу из B отнести его прообраз в A).

Если каждому элементу из A отнести этот же элемент, то получим тождественное отображение E множества A на себя. Очевидно, $S^{-1}S=E$. Аналогично, $SS^{-1}=E$ (здесь E — тождественное отображение B на себя).

Если S и S_1 — взаимно однозначные отображения A на B, T — взаимно однозначное отображение B на C, то из $TS=TS_1$ следует $S=S_1$. В самом деле, последовательно находим:

$$T^{-1}(TS)=T^{-1}(TS_1),$$
$$(T^{-1}T)\,S=(T^{-1}T)\,S_1,$$
$$ES=ES_1,$$
$$S=S_1.$$

Аналогично из $TS=T_1S$ найдем $T=T_1$.

Однолистные функции

Функция $f(z)$, определенная в некоторой области, называется *унивалентной* на некотором множестве (входящем в область определения), если разным точкам этого множества отвечают разные значения функции.

Мероморфная (в частности, аналитическая) функция $f(z)$ в некоторой области D называется *однолистной* в D, если она унивалентна на D.

Если мероморфная функция $f(z)$ однолистна в области D, то в каждой регулярной точке этой области производная отлична от нуля. В самом деле, если в некоторой точке z_0 $f(z_0)=a$, $f'(z_0)=0$, то z_0 будет a-точкой кратности выше первой, а тогда в силу одного из следствий из теоремы Руше (см. § 18) при b, достаточно близких к a, $f(z)$ более одного раза принимает значение b, что противоречит унивалентности.

Однолистная функция $f(z)$ в области D может иметь не более одного полюса, причем этот полюс может быть только простым. В самом деле, если z_0 — полюс для $f(z)$, то z_0 — нуль для $\frac{1}{f(z)}$, а так как $\frac{1}{f(z)}$ тоже однолистна, то по доказанному z_0 — простой нуль для $\frac{1}{f(z)}$ и, следовательно, простой полюс для $f(z)$.

Всякая аналитическая функция $f(z)$ однолистна в достаточно малой окрестности каждой точки, в которой производная отлична от нуля.

В самом деле, пусть $f'(z_0) \neq 0$, тогда если бы ни в какой окрестности z_0 $f(z)$ не была однолистна, то нашлись бы такие последовательности точек a_n и b_n, что $a_n \to z_0$, $b_n \to z_0$, $a_n \neq b_n$, $f(a_n) = f(b_n)$. Пусть тогда γ — окружность с центром z_0 и радиусом ρ, где ρ таково, что $f(z) \neq f(z_0)$ при $0 < |z - z_0| \leqslant \rho$. Очевидно, $f(z) - f(z_0)$ имеет внутри γ только один нуль (с учетом кратности) и не имеет нулей на γ. Но $f(z) - f(a_n) \to f(z) - f(z_0)$ равномерно на γ, следовательно, — по теореме Гурвица — при n, достаточно большом, $f(z) - f(a_n)$ имеет внутри γ тоже лишь один нуль (с учетом кратности), и мы получаем противоречие, ибо при достаточно большом n эта функция имеет внутри γ нули a_n и b_n.

Всякая мероморфная функция однолистна в достаточно малой окрестности каждого простого полюса. В самом деле, если z_0 — простой полюс для $f(z)$, то z_0 — простой нуль для $\frac{1}{f(z)}$. По доказанному $\frac{1}{f(z)}$ однолистна в некоторой окрестности точки z_0, следовательно, $f(z)$ однолистна в этой же окрестности.

Замечание 1. Если $f(z)$ мероморфна в полной плоскости, то $f(z)$ есть рациональная функция.

В самом деле, пусть $z_1, \ldots, z_n$ — полюсы $f(z)$ (число их $\geqslant 0$ и, конечно, среди них может быть ∞). Вычитая из $f(z)$ сумму главных частей $f(z)$ в полюсах $z_1, \ldots, z_n$, получим функцию, аналитическую в полной плоскости, но таковая в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Следовательно, $f(z)$ равна сумме постоянной и своих главных частей в полюсах $z_1, \ldots, z_n$.

Таким образом, $f(z)$ рациональна.

Замечание 2. Если $f(z)$ мероморфна и однолистна в полной плоскости, то $f(z)$ есть линейная функция (т. е. вида $\left.\frac{az+b}{cz+d}\right)$.

В самом деле, $f(z)$ может иметь не более одного полюса и таковой может быть лишь простым. Как мы видели в предыдущем замечании, $f(z)$ равна сумме постоянной и главных частей $f(z)$ в ее полюсах; следовательно, в рассматриваемом случае $f(z)$ может лишь иметь вид $c+\frac{k}{z-a}$ (если есть конечный полюс a), $c+kz$ (если ∞ есть полюс). Случай отсутствия полюсов не может представиться, ибо в этом случае $f(z)$ была бы постоянной.

Итак, $f(z)$ линейна. Заметим, что значениями $f(z)$ будут все точки полной плоскости.

Отметим еще один факт, относящийся к однолистным функциям. Если $f(z)$ однолистна в области, полученной выбрасыванием из D некоторого множества точек, не имеющего предельной точки внутри D, то после надлежащего доопределения в точках этого множества $f(z)$ станет однолистной в области D.

Действительно, точки упомянутого множества являются изолированными особыми для $f(z)$. Учитывая однолистность $f(z)$ и теорему Сохоцкого, легко заметить, что эти особые точки не могут быть существенно особыми, следовательно, в них $f(z)$ естественным образом доопределяется и становится мероморфной в D. Если бы она в двух точках D принимала одинаковое значение a, то в любой близости к этим точкам она принимала бы любые, достаточно близкие к a значения, что противоречит однолистности $f(z)$ в ее первоначальной области определения.

Конформное отображение области на область

Определение. Взаимно однозначное отображение $w=f(z)$ области D на область Δ, конформное в каждой точке области D, называется *конформным отображением* области D на область Δ (речь идет об областях на полной плоскости).

Всякая мероморфная (в частности, аналитическая) однолистная функция $f(z)$ в области D дает конформное отображение $w=f(z)$ области D на соответствующую ей область значений функции $f(z)$.

Это следует из того, что производная однолистной функции в каждой регулярной точке отлична от нуля (и возможный полюс — простой), и из того, что отображение конформно в точке, если выполняющая отображение функция имеет в этой точке отличную от нуля производную (или простой полюс).

Для практического построения конформных отображений областей полезна

Теорема. Если $f(z)$ аналитична в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, и на нем и если $f(z)$ унивалентна на C, то $w=f(z)$ будет конформным отображением области, ограниченной простым замкнутым контуром C, на область, ограниченную простым замкнутым контуром Γ, который описывает точка $f(z)$, когда точка z описывает C.

Доказательство. Пусть a — точка внутри (вне) Γ. По принципу аргумента число корней уравнения $f(z)-a=0$, лежащих внутри C, равно

$$\frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg}[f(z)-a]\}_C,$$

а это число (из геометрических соображений) равно ± 1 (0). Это показывает, что внутри C $f(z)$ принимает ровно один раз каждое значение, лежащее внутри Γ, и не принимает значений, лежащих вне Γ. Так как множество значений $f(z)$, когда z принимает всевозможные значения внутри C,— открытое, то значениями $f(z)$ не могут быть точки контура Γ (ибо в противном случае некоторые точки вне Γ оказались бы значениями $f(z)$, что невозможно). Итак, когда z пробегает все точки, лежащие внутри контура C, $f(z)$ по одному разу пробегает все точки, лежащие внутри контура Γ, что и требовалось доказать.

Линейные преобразования

Линейные преобразования

$$w=\frac{az+b}{cz+d};\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.66)$$

являются единственными конформными отображениями полной плоскости на полную плоскость. Преобразование, обратное линейному, также линейно, произведение линейных преобразований также является линейным преобразованием. Всякое линейное преобразование (3.66) определяется некоторой матрицей комплексных чисел $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с отличным от нуля определителем, причем матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

только тогда определяют одно линейное преобразование, когда их элементы пропорциональны. Если L определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то L^{-1} определяется матрицей $\begin{pmatrix} -c & a \\ d & -b \end{pmatrix}$. Линейное преобразование (3.66) называется целым, если $c = 0$, дробным, если $c \neq 0$.

Заметим, что если $w = az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right)$, где $a \neq 0$, то w можно получить, исходя из z, так: $z_1 = z + \frac{b}{a}$; $w = az_1$.

Заметим, что если

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)}, \quad \text{где } c \neq 0,$$

то w можно получить, исходя из z, так:

$$z_1 = z + \frac{d}{c}; \quad z_2 = \frac{1}{z_1}; \quad z_3 = \frac{bc-ad}{c_2} z_2; \quad w = z_3 + \frac{a}{c}.$$

Из этих замечаний следует, что всякое линейное преобразование можно разложить в произведение линейных преобразований частных видов

$$w = z + a; \quad w = az \ (a \neq 0); \quad w = \frac{1}{z}.$$

Еще заметим, что если число $a \neq 0$ представить в показательной форме $a = Re^{i\gamma}$, то $w = az$ можно получить, исходя из z, так: $z_1 = e^{i\gamma}z$; $w = Rz$. Наконец, $w = \frac{1}{z}$ можно получить, исходя из z, так: $z_1 = \frac{1}{\bar{z}}$, $w = \bar{z}_1$.

Из сказанного следует, что всякое линейное преобразование можно разложить в произведение преобразований, каждое из которых относится к одному из пяти видов:

$$w = z + a; \quad w = e^{i\gamma}z; \quad w = Rz; \quad w = \frac{1}{z}; \quad w = \overline{z}, \tag{3.66'}$$

где $a = \alpha + i\beta$ — комплексное число, γ — действительное число, R — положительное число. Эти преобразования могут быть переписаны так (полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$):

$$\left.\begin{array}{lll} \begin{cases} u = x + \alpha, \\ v = y + \beta; \end{cases} & \begin{cases} u = x\cos\gamma - y\sin\gamma, \\ v = x\sin\gamma + y\cos\gamma; \end{cases} & \\ \begin{cases} u = Rx, \\ v = Ry; \end{cases} & \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \\ v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}; \end{cases} & \begin{cases} u = x, \\ v = -y \end{cases} \end{array}\right\} \tag{3.66''}$$

и называются соответственно: *параллельным переносом*, *поворотом*, *подобием*, *инверсией*, *симметрией*.

Окружностями (в широком смысле) на полной плоскости будем называть окружности и прямые. Через каждые три различные точки полной плоскости проходит единственная окружность (в широком смысле).

Теорема. Всякое линейное преобразование переводит каждую окружность (в широком смысле) в некоторую окружность (в широком смысле).

Доказательство. Так как всякое линейное преобразование разлагается в произведение преобразований, относящихся к упомянутым выше пяти видам, то достаточно показать, что преобразования этих пяти видов переводят окружности (в широком смысле) в окружности (в широком смысле). Это очевидно для параллельного переноса, поворота, подобия, симметрии. Остается проверить это для инверсии. Уравнение какой-нибудь окружности (в широком смысле) можно записать в виде

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

(A, B, C, D — действительные числа; при $A \neq 0$ — это окружность, при $A = 0$ — это прямая). Из соотношений

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{u}{u^2+v^2}, \\ y &= \frac{v}{u^2+v^2} \end{aligned}\right\}$$

(преобразование, обратное инверсии, есть тоже инверсия) найдем, что образ этой окружности (в широком смысле) имеет уравнение

$$D(u^2+v^2)+Bu+Cv+A=0$$

и, следовательно, тоже является окружностью (в широком смысле), что и требовалось доказать.

Всякое нетождественное линейное преобразование имеет либо одну, либо две неподвижные точки (т. е. точки, переходящие в себя).

В самом деле, в случае дробного линейного преобразования $w = \frac{az+b}{cz+d}$ его полюс и точка ∞ не являются неподвижными точками, а отличная от них точка будет неподвижной, если удовлетворяет уравнению $z = \frac{az+b}{cz+d}$ (квадратное уравнение); в случае целого линейного преобразования $w = az+b$ точка ∞ является неподвижной точкой, а конечная точка будет неподвижной, если удовлетворяет уравнению $z = az+b$ (уравнение степени не выше первой).

Таким образом, нетождественное линейное преобразование в обоих случаях имеет либо одну, либо две неподвижные точки.

Теорема. Если z_1, z_2, z_3 — какие-нибудь три различные точки полной плоскости и w_1, w_2, w_3 — тоже какие-нибудь три различные точки полной плоскости, то существует единственное линейное преобразование, переводящее z_1, z_2, z_3 соответственно в w_1, w_2, w_3.

Доказательство. Сперва заметим, что не существует различных линейных преобразований L и M, переводящих z_1, z_2, z_3 соответственно в w_1, w_2, w_3, так как в противном случае $M^{-1}L$ было бы нетождественным линейным преобразованием с тремя неподвижными точками z_1, z_2, z_3, что невозможно.

Непосредственно проверяется, что линейное преобразование L_{z_1, z_2, z_3}, где

$$L_{z_1, z_2, z_3}(z) = \begin{cases} \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}, & \text{если } z_1, z_2, z_3 \text{ конечны}, \\ \dfrac{z_3 - z_2}{z - z_2}, & \text{если } z_1 = \infty, \\ \dfrac{z - z_1}{z_3 - z_1}, & \text{если } z_2 = \infty, \\ \dfrac{z - z_1}{z - z_2}, & \text{если } z_3 = \infty, \end{cases} \tag{3.67}$$

переводит z_1, z_2, z_3 соответственно в $0, \infty, 1$. Отсюда следует, что $L^{-1}_{w_1, w_2, w_3} L_{z_1, z_2, z_3}$ будет линейным преобразованием, переводящим z_1, z_2, z_3 соответственно в w_1, w_2, w_3, что и требовалось доказать.

Понятие симметрии относительно прямой хорошо известно. Введем теперь понятие симметрии относительно окружности.

Определение. Пусть C — окружность с центром O и радиусом R. Точкой, *симметричной* какой-нибудь точке P относительно окружности C, называется точка P^*, обладающая свойствами: 1) P и P^* лежат на одном луче, выходящем из центра окружности C; 2) $OP \cdot OP^* = R^2$.

Если P совпадает с центром окружности C, то полагают $P^* = \infty$, и обратно. Если P^* симметрична P, то P симметрична P^*.

Лемма. Если P и P^* — симметричные точки относительно окружности (в широком смысле) C, то всякая окружность (в широком смысле), проходящая через P и P^*, ортогональна C. Обратно, всякая окружность (в широком смысле), проходящая через P и ортогональная C, проходит через P^*.

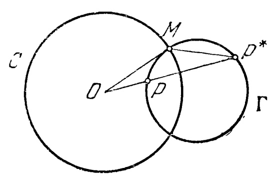


Рис. 57.

Доказательство. Пусть (рис. 57) Γ — окружность, проходящая через P и P^*, и OM — касательная к Γ, проведенная из центра O окружности C. По известной теореме элементарной геометрии $OM^2 = OP \cdot OP^*$. Но $OP \cdot OP^* = R^2$, откуда $OM = R$. Следовательно, точка M лежит на C и Γ ортогональна C.

Пусть (см. рис. 57) теперь Γ — окружность, проходящая через P и ортогональная C, M — точка пересечения C и Γ, P^* — вторая точка пересечения Γ с прямой OP. Тогда OM будет касательной к Γ и, следовательно, $R^2 = OM^2 = OP \cdot OP^*$, откуда следует, что P^* есть точка, симметричная P относительно C. Теорема становится тривиальной, если либо C, либо Γ есть прямая, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть точки P и P^* симметричны относительно окружности (в широком смысле) C; точки Q и Q^* симметричны относительно окружности (в широком смысле) Γ. Тогда линейное преобразование, переводящее C в Γ и точку P в точку Q, переведет точку P^* в точку Q^*.

В самом деле, в силу консерватизма углов окружности (в широком смысле), проходящие через P и ортогональные C, перейдут в окружности (в широком смысле), проходящие через Q и ортогональные Γ, следовательно, точка пересечения первых P^* перейдет в точку пересечения вторых Q^*.

Положим для всяких двух разных точек α, β

$$L_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}, & \text{если } \alpha, \beta \text{ конечны,} \\ \dfrac{1}{z-\beta}, & \text{если } \alpha = \infty, \\ z-\alpha, & \text{если } \beta = \infty. \end{cases} \tag{3.68}$$

Очевидно $L_{\alpha,\beta}$ будет одним из линейных преобразований, переводящих α, β соответственно в 0, ∞.

Положим еще для всякого K (отличного от 0 и ∞)

$$L_K(z) = Kz. \tag{3.69}$$

Очевидно L_K есть линейное преобразование с неподвижными точками 0 и ∞, и обратно, всякое линейное преобразование с неподвижными точками 0 и ∞ есть L_K при некотором K (это видно из выражения $L_{0,\infty,\gamma}$, где γ отлично от 0 и ∞). Следовательно, всякое линейное преобразование, сохраняющее точку 0 и переводящее единичную окружность в себя, должно иметь вид L_K (ибо ∞, как симметричная с точкой 0 относительно единичной окружности, сохраняется), причем, очевидно, $|K| = 1$.

Следовательно, линейное преобразование, переводящее единичную окружность в себя, сохраняющее центр и направление действительной оси, есть тождественное преобразование.

Замечание. Всякое линейное преобразование с двумя неподвижными точками α, β можно записать в виде

$$L = L_{\alpha, \beta}^{-1} L_K L_{\alpha, \beta}, \tag{3.70}$$

где K отлично от 0 и ∞. Обратно, всякое преобразование (3.70) есть линейное преобразование с неподвижными точками 0 и ∞.

В самом деле, если L имеет неподвижные точки α и β то $L_{\alpha, \beta} L L_{\alpha, \beta}^{-1}$ будет линейным преобразованием с неподвижными точками 0, ∞, следовательно $L_{\alpha\beta} L L_{\alpha\beta}^{-1} = L_K$, откуда умножением слева на $L_{\alpha, \beta}^{-1}$ и умножением справа на $L_{\alpha, \beta}$ получим искомое равенство (3.70).

Обратно, $L_{\alpha, \beta}^{-1} L_K L_{\alpha, \beta}$ при всяком K, отличном от 0 и ∞, будет линейным преобразованием с неподвижными точками α, β.

Для каждого нетождественного линейного преобразования с двумя неподвижными точками $K \neq 1$ и определено с точностью до замены обратным числом (ибо при перестановке неподвижных точек K заменяется на $\left.\frac{1}{K}\right)$.

Нетождественное линейное преобразование с двумя неподвижными точками называется *гиперболическим*, если K положительно, *эллиптическим*, если $|K| = 1$, *локсодромическим* в прочих случаях. Нетождественное линейное преобразование с одной неподвижной точкой называется *параболическим*.

Теорема. Пусть D — одна из двух областей, на которые окружность (в широком смысле) C делит полную плоскость, P — точка в D, m — «направление», выходящее из P; пусть Δ — одна из двух областей, на которые окружность (в широком смысле) Γ делит полную плоскость, Q — точка в Δ, n — «направление», выходящее из Q. Тогда существует единственное линейное преобразование переводящее область D в область Δ, точку P в точку Q, «направление» m в «направление» n.

Доказательство. Сперва заметим, что внутренность или внешность окружности можно линейным преобразованием перевести в некоторую полуплоскость (для этого достаточно взять линейное преобразование, переводящее три разные точки окружности в какие-нибудь три разные точки, из которых одна ∞). Заметим еще, что в частном случае, когда C и Γ, упоминаемые в теореме, являются прямыми, найдется линейное преобразование, переводящее D в Δ и P в Q, ибо легко получить линейное преобразование L, составленное из вращения, параллельного переноса и подобия, переводящее D в полуплоскость $y > 0$ и точку P в точку i, и аналогичное M, переводящее Δ в полуплоскость $y > 0$ и точку Q в точку i, а тогда $M^{-1}L$ переведет D в Δ и P в Q.

После этих замечаний перейдем к доказательству теоремы. Пусть $L_1(M_1)$ — линейное преобразование, переводящее $D(\Delta)$ в некоторую полуплоскость $D_1(\Delta_1)$; оно переводит точку $P(Q)$ и «направление» $m(n)$ в некоторые точку $P_1(Q_1)$ и «направление» $m_1(n_1)$. Пусть N — линейное преобразование, переводящее внутренность единичного круга в некоторую полуплоскость δ; оно переведет точку O в некоторую точку R. Пусть $L_2(M_2)$ — линейное преобразование, переводящее $D_1(\Delta_1)$ в δ и $P_1(Q_1)$ в R; оно переведет «направление» $m_1(n_1)$, выходящее из $P_1(Q_1)$, в некоторое «направление» $m_2(n_2)$, выходящее из R. Преобразование $L_3 = N^{-1}L_2L_1$ $(M_3 = N^{-1}M_2M_1)$ переводит $D(\Delta)$ во внутренность единичного круга, $P(Q)$ в его центр, «направление» $m(n)$ в некоторое направление $m_3(n_3)$, выходящее из центра. Пусть T — вращение, переводящее «направление» m_3 в «направление» n_3; тогда $S = M_3^{-1}TL_3$ будет искомым линейным преобразованием, переводящим D в Δ, P в Q, m в n. Остается показать, что не существует двух таких преобразований S и S_1. Пусть N — линейное преобразование, переводящее внутренность единичного круга в D, его центр в P, «направление» действительной оси в «направление» m. Тогда $N^{-1}S_1^{-1}SN$ переводит внутренность единичного круга в себя, сохраняет центр и направление действительной оси, следовательно, будет тождественным преобразованием E. Но из $N^{-1}S_1^{-1}SN = E$ (умножаем слева на N, справа на N^{-1} и, наконец, слева на S_1) найдем, что $S = S_1$.

Замечание. Если линейное преобразование L переводит окружность (в широком смысле) C в окружность (в широком смысле) Γ и точку α, не лежащую на C, в точку β, то

$$L = L_{\beta\beta^*}^{-1} L_K L_{\alpha\alpha^*}$$

при надлежащем выборе K, где α^* (β^*) — точка, симметричная α (β) относительно C (Γ).

В самом деле, $L_{\beta\beta^*}LL_{\alpha\alpha^*}^{-1}$ сохраняет точки 0 и ∞, следовательно, имеет вид L_K. Из $L_{\beta\beta^*}LL_{\alpha\alpha^*}^{-1} = L_K$ умножением слева на $L_{\beta\beta^*}^{-1}$ и умножением справа на $L_{\alpha\alpha^*}$ получим искомое выражение для L.

В частности, если Γ есть единичная окружность и $\beta = 0$, то $\beta^* = \infty$; но $L_{0,\infty}$ есть тождественное преобразование, следовательно, в рассматриваемом случае $L = L_K L_{\alpha\alpha^*}$ при некотором K. Заметим что тогда при произвольном K это преобразование переведет α в 0 и C в некоторую окружность с центром 0. Поэтому достаточно потребовать, чтобы некоторое z_0 на C переходило в точку с единичным модулем. Таким образом, общий вид всех линейных преобразований, переводящих C в единичную окружность и точку α, не лежащую на C, в 0, есть

$$L = L_K L_{\alpha\alpha^*}; \quad |K| = \frac{1}{|L_{\alpha\alpha^*}(z_0)|},$$

где z_0 — какая-нибудь фиксированная точка на C. Иначе говоря общий вид таких преобразований есть

$$w = K\frac{L_{\alpha\alpha^*}(z)}{L_{\alpha\alpha^*}(z_0)}, \text{ где } |K| = 1. \tag{3.71}$$

Пример 1. Найти всевозможные линейные преобразования, переводящие единичную окружность в себя и точку α в 0.

Здесь $\alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, следовательно, искомые линейные преобразования будут:

$$w = K\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \text{ где } |K| = 1 \tag{3.72}$$

(ибо если $\alpha = re^{i\varphi}$, то $\frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$ и можно взять $z_0 = e^{i\varphi}$).

Пример 2. Найти все линейные преобразования, переводящие действительную ось в единичную окружность и точку α в 0.

Здесь $\alpha^* = \bar{\alpha}$, следовательно, искомые линейные преобразования будут:

$$w = K\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}, \text{ где } |K| = 1 \tag{3.73}$$

Конформные отображения односвязных областей

Формулировка теоремы Римана — Каратеодори. Всякая односвязная область на полной плоскости, кроме полной плоскости и полной плоскости с выколотой точкой, может быть конформно отображена на внутренность единичного круга.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится. Из теоремы Римана — Каратеодори следует, что всякие две односвязные области D и Δ, отличные от полной плоскости и полной плоскости с выколотой точкой, могут быть конформно отображены одна на другую. В самом деле, если S и T — конформные отображения D и Δ на внутренность единичного круга, то $T^{-1}S$ будет конформным отображением D на Δ. Вопрос о том, насколько многообразны конформные отображения D на Δ, легко решается, если будет доказана

Лемма Шварца. Если $f(z)$ внутри единичного круга аналитична, по модулю не превышает 1 и имеет нуль в точке O, то $|f(z)| \leqslant |z|$ при $|z| < 1$, причем либо $|f(z)| < |z|$ при $0 < |z| < 1$, либо $f(z) = kz$, где k постоянно и $|k| = 1$.

Доказательство. Так как $f(0) = 0$, то $\frac{f(z)}{z}$ аналитична при $|z| < 1$. При $|z| = r$, где $0 < r < 1$ имеем $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}$, следовательно, по принципу максимума модуля $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}$ при $|z| \leqslant r$. Переход к пределу при $r \to 1$ показывает, что при $|z|<1$ имеем $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$. Если в некоторой точке $z_0 \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$, то $\frac{f(z)}{z} = \text{const} = k$, где, очевидно, $|k| \leqslant 1$. В противном случае (а также в предыдущем случае, когда $|k|<1$) имеем $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1$ при $|z|<1$. Таким образом, либо $f(z) = kz$, где $|k|=1$, либо $|f(z)|<|z|$ при $0<|z|<1$, что и требовалось доказать.

Следствие. Конформное отображение внутренности единичного круга на себя, сохраняющее точку O и направление действительной оси, есть тождественное преобразование.

В самом деле, если $w = f(z)$ есть такое конформное отображение, то $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|f(z)| \leqslant |z|$ при $|z|<1$. Но обратное отображение $z = \varphi(w)$ также удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|\varphi(w)| \leqslant w$ при $|w|<1$. Полагая здесь $w = f(z)$, получим $|z| \leqslant |f(z)|$ при $|z|<1$. Сравнение полученных неравенств показывает, что $|f(z)| = |z|$ при $|z|<1$. Следовательно, по лемме Шварца $|f(z)| = kz$, где $|k| = 1$. Учитывая, что направление действительной оси сохраняется, находим $k = 1$ и, следовательно, $f(z) = z$.

Из теоремы Римана — Каратеодори и предыдущего следствия из леммы Шварца вытекает

Теорема. Пусть $D(\Delta)$ — односвязная область, отличная от полной плоскости и полной плоскости с выколотой точкой, $P(Q)$ — точка в $D(\Delta)$, $m(n)$ — «направление», выходящее из $P(Q)$. Тогда существует единственное конформное отображение D на Δ, переводящее точку P в точку Q и «направление» m в «направление» n.

Доказательство. Пусть $S(T)$ — конформное отображение области $D(\Delta)$ на внутренность единичного круга, существующее в силу теоремы Римана — Каратеодори. Тогда точка $P(Q)$ и «направление» $m(n)$ перейдут при этом в некоторую точку $P_1(Q_1)$ и некоторое «направление» $m_1(n_1)$.

Пусть L — линейное преобразование, переводящее единичную окружность в себя, точку P_1 в точку Q_1, «направление» m_1 в «направление» n_1. Тогда $T^{-1}LS$ будет искомым конформным отображением D на Δ, переводящим точку P в точку Q и «направление» m в «направление» n. Остается доказать единственность такого отображения.

Пусть $S(T)$ — конформное отображение $D(\Delta)$ на внутренность единичного круга, переводящее точку $P(Q)$ в точку O, «направление» $m(n)$ в «направление» действительной оси (существование отображения $S(T)$ доказано). Если теперь U — какое-нибудь конформное отображение D на Δ, переводящее P в O и m в n, то TUS^{-1} будет конформным отображением внутренности единичного круга на себя, сохраняющим точку O и направление действительной оси. По следствию из леммы Шварца $TUS^{-1} = E$ (тождественное преобразование), следовательно, $U = T^{-1}S$, что доказывает единственность U.

Замечание. Если области D и Δ ограничены окружностями (в широком смысле), то всякое конформное отображение D на Δ будет линейным.

В самом деле, пусть S — конформное отображение D на Δ. Какая-нибудь точка M области D и выходящее из нее «направление» m перейдут в некоторую точку N области Δ и выходящее из нее «направление» n. Но мы видели, что существует линейное преобразование L, которое, как и S, переводит D в Δ, M в N, m в n, а так как такое конформное отображение единственно, то $S = L$.

Формулировка теоремы о соответствии границ при конформном отображении. Если $w = f(z)$ есть конформное отображение области D, ограниченной простым замкнутым контуром C, на область Δ, ограниченную простым замкнутым контуром Γ, то функцию $f(z)$ можно так доопределить в точках контура C, что $f(z)$ станет непрерывной функцией в замкнутой области, ограниченной контуром C, и соответствие $w = f(z)$ окажется взаимно однозначным отображением замкнутой области, ограниченной контуром C, на замкнутую область, ограниченную контуром Γ.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится. Таким образом, всякое конформное отображение области, ограниченной простым замкнутым контуром C, на область, ограниченную простым контуром Γ, индуцирует определенное взаимно однозначное соответствие между точками самих контуров C и Γ.

ГЛАВА IV

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Гамма-функция, или эйлеров интеграл 2-го рода, определяется (для положительных значений независимого переменного s) формулой

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \qquad (s > 0). \tag{4.1}$$

Интеграл в правой части является несобственным при верхнем пределе и, кроме того, в случае $s < 1$ несобственным при нижнем пределе. Сходимость интеграла (4.1) при всех $s > 0$ обеспечена, так как при $x \to +\infty$ показательная функция e^x растет быстрее любой степенной функции и так как интеграл с нижним пределом 0 от $x^{-\alpha}$ при $\alpha < 1$ сходится.

Формула приведения для гамма-функции (первая основная формула)

Интегрирование по частям дает:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s\, dx =$$

$$= -e^{-x} x^s \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx = s\Gamma(s).$$

Таким образом, получаем формулу приведения

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad (s > 0). \tag{4.2}$$

Отсюда заключаем, что

$$\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1) = (s-1)(s-2)\,\Gamma(s-2) = \ldots$$

и вообще

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\ldots(s-k)\,\Gamma(s-k) \qquad (k < s), \quad (4.3)$$

а тогда при натуральном n

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1);$$

но

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

следовательно,

$$\Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n = n!. \qquad (4.4)$$

Формула приведения (4.2) позволяет выразить значения гамма-функции для любого положительного s через ее значения для s, лежащего между 0 и 1.

Второе выражение гамма-функции

Делая подстановку $x = t^2$, получим:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2s-1}\,dt$$

или, заменяя t на x,

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2s-1}\,dx \qquad (s > 0), \qquad (4.5)$$

откуда, в частности,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Ниже будет показано, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (см. стр. 209), откуда с помощью (4.3) найдем для любого натурального n:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \qquad (4.6)$$

Бета-функция

Бета-функция, или эйлеров интеграл 1-го рода, определяется (для положительных значений независимых переменных p, q) формулой

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (p>0,\ q>0). \tag{4.7}$$

Этот интеграл является несобственным при нижнем пределе в случае $p<1$ и несобственным при верхнем пределе в случае $q<1$.

Делая подстановку $x=\cos^2\varphi$, получим второе выражение для бета-функции:

$$B(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi \qquad (p>0,\ q>0). \tag{4.8}$$

Бета-функция может быть легко выражена через Г-функцию посредством формулы

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{4.9}$$

Действительно, перемножая равенства

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx; \quad \Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy$$

и переходя в получающемся двойном интеграле к полярным координатам

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned} \qquad \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r\right],$$

получим (рис. 58 и 59):

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\iint_D e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dx\,dy =$$

$$= 4\iint_\Delta e^{-r^2}r^{2p+2q-1}\cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2p+2q-1}\,dr\; 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi = \Gamma(p+q)\,B(p, q),$$

откуда и вытекает формула (4.9).

Из формулы (4.9) видно, что бета-функция симметрична: $B(p, q) = B(q, p)$.

В случае натуральных m, n из (4.9) и (4.4) следует:

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Затем в силу (4.8)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi,$$

но по (4.9)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)},$$

откуда, учитывая, что $\Gamma(1) = 1$, получим равенство $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

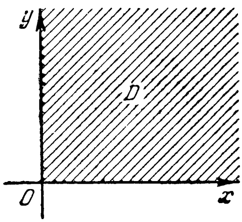


Рис. 58.

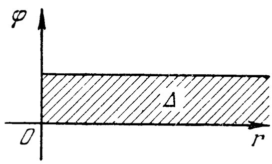


Рис. 59.

которое было использовано при выводе формулы (4.6). Так как из (4.5), как уже отмечалось, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

то отсюда находим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.10}$$

или (учитывая четность функции e^{-x^2}):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{4.10'}$$

14 Зак. 1944. П. И. Романовский

Интеграл, фигурирующий в формулах (4.10) или (4,10′), называется *интегралом Гаусса.*

Если p — любое положительное, n — натуральное, то из (4.9), (4.4), (4.3) находим:

$$\mathrm{B}(p, n)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(p+n)}=\frac{\Gamma(p)\,1.2\ldots(n-1)}{(p+n-1)\ldots p\Gamma(p)}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}.$$

Делая в формуле (4.7) подстановку

$$x=\frac{y}{1+y}$$

(и меняя затем y на x), получим третье выражение для бета-функции:

$$\mathrm{B}(p, q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx \quad (p>0,\ q>0), \tag{4.11}$$

откуда

$$\mathrm{B}(s, 1-s)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx \quad (0<s<1) \tag{4.11′}$$

или, учитывая (4.9),

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx \quad (0<s<1). \tag{4.12}$$

Вычисление интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx$, где $0<s<1$.

Пусть сперва s — рациональное число вида $\frac{m}{n}$, где n — четное, m — нечетное, $m<n$. Подстановка $x=z^n$ даст:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{1+x}\,dx=n\int_0^{+\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz.$$

Используя правило вычисления несобственных интегралов с помощью вычетов (см. гл. III, § 17), получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz=2\pi i\sum_a \operatorname{Res}_a\frac{z^{m-1}}{1+z^n},$$

где a — полюсы рациональной дроби

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n},$$

лежащие в верхней полуплоскости, т. е. корни уравнения $1+z^n=0$, имеющие положительный коэффициент при i. Имеем:

$$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{e^{\pi i}}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Из этих n значений $\sqrt[n]{-1}$ положительный коэффициент при i имеют значения, соответствующие $k=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{n}{2}-1$. Следовательно, все значения a суть

$$a=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} \quad \left(k=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{n}{2}-1\right).$$

С помощью правила вычисления вычета относительно простого полюса находим:

$$\operatorname*{Res}_a \frac{z^{m-1}}{1+z^n}=\left[\frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}}\right]_{z=a}=\frac{a^{m-n}}{n}.$$

Таким образом, имеем при $s=\frac{m}{n}$ (используя в процессе преобразований суммирование геометрической прогрессии и выражение синуса через показательную функцию по формуле Эйлера):

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz=n\pi i\sum_a \operatorname*{Res}_a\frac{z^{m-1}}{1+z^n}=\pi i\sum_a a^{m-n}=$$

$$=\pi i\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}(m-n)}=\pi i\,\frac{e^{\frac{\pi i}{n}(m-n)}-e^{\frac{(n+1)\pi i}{n}(m-n)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}(m-n)}}=$$

$$=\pi i\,\frac{e^{\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi i}{n}(m-n)}}{e^{\frac{\pi i}{n}(m-n)}}\;\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(n-m)}-e^{-\frac{\pi i}{2}(n-m)}}{e^{\frac{\pi i}{n}(n-m)}-e^{-\frac{\pi i}{n}(n-m)}}=$$

$$=\pi i\,\frac{e^{\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi i}{n}(m-n)}}{e^{\frac{\pi i}{n}(m-n)}}\;\frac{\sin\frac{\pi}{2}(n-m)}{\sin\frac{\pi}{n}(n-m)}=\gamma\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi m}{n}}=\gamma\,\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

где

$$\gamma = i\,\frac{e^{\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi i}{n}(m-n)}}{e^{\frac{\pi i}{n}(m-n)}}\sin\frac{\pi}{2}(n-m),$$

и, следовательно, $|\gamma| = 1$. Но левая часть нашей цепочки равенств и коэффициент при γ положительны, поэтому $\gamma = 1$. Таким образом, имеем при $s = \frac{m}{n}$ равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi s};$$

но левая и правая части этого равенства суть непрерывные функции от s на интервале $0 < s < 1$ (мы не останавливаемся здесь на обосновании непрерывности левой части), а так как каждое действительное число этого интервала можно представить как предел последовательности правильных рациональных дробей вида $\frac{m}{n}$, где n — четное, m — нечетное, для которых упомянутое равенство доказано, то в пределе найдем справедливость его для всех s, $0 < s < 1$. Итак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi s} \qquad (0 < s < 1). \tag{4.13}$$

Вторая основная формула для гамма-функции

Из (4.12) и (4.13) находим:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \qquad (0 < s < 1). \tag{4.14}$$

Формула (4.14) позволяет выразить значение гамма-функции для s, лежащих между $^1/_2$ и 1, через ее значения для s, лежащих между 0 и $^1/_2$.

Гамма-функция как предел произведения

Учитывая, что $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$ при $n \to \infty$, найдем:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\,dx$$

(законность этого предельного перехода легко установить, но на этом мы не останавливаемся). Положим:

$$I_k(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k x^{s-1}\,dx \qquad (0 \leqslant k \leqslant n;\ s > 0).$$

Интегрирование по частям дает:

$$I_k(s) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k \frac{x^s}{s}\Bigg|_0^n + \frac{k}{ns}\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{k-1} x^s\,dx =$$

$$= \frac{k}{ns} I_{k-1}(s+1);$$

значит, применяя последовательно эту формулу и учитывая, что

$$I_0(s) = \int_0^n x^{s-1}\,dx = \frac{x^s}{s}\Bigg|_0^n = \frac{n^s}{s},$$

найдем:

$$I_n(s) = \frac{n}{ns} I_{n-1}(s+1) = \frac{n}{ns}\,\frac{n-1}{n(s+1)} I_{n-2}(s+2) =$$

$$= \frac{n}{ns}\,\frac{n-1}{n(s+1)}\,\frac{n-2}{n(s+2)} I_{n-3}(s+3) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{n}{ns}\,\frac{n-1}{n(s+1)}\cdots\frac{1}{n(s+n-1)} I_0(s+n) =$$

$$= \frac{1\cdot 2\ldots n}{n^n s(s+1)\ldots(s+n-1)}\,\frac{n^{s+n}}{s+n} = \frac{1\cdot 2\ldots n}{s(s+1)\ldots(s+n)}\,n^s.$$

Таким образом,

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\ldots n}{s(s+1)\ldots(s+n)}\,n^s \qquad (s > 0). \qquad (4.15)$$

Можно показать, что предел, стоящий в правой части формулы (4.15), существует для всех комплексных чисел s (конечный для всех s, отличных от нуля и отрицательных целых чисел). Выражение (4.15) может служить определением гамма-функции для любого комплексного значения s.

Если формула (4.15) принята за определение гамма-функции, то формулу приведения (4.2) можно доказать следующим образом:

$$\Gamma(s+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\ldots n}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n+1)} n^{s+1} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left\{ s\frac{1\cdot 2\ldots n}{s(s+1)\ldots(s+n)} n^s \frac{n}{s+n+1} \right\} = s\Gamma(s).$$

Гамма-функция является аналитической на всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек 0, —1, —2, —3, ..., являющихся для нее простыми полюсами. Гамма-функция, как это можно установить, нигде в нуль не обращается.

§ 2. БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ С ЛЮБЫМ ИНДЕКСОМ

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

Чтобы объяснить «происхождение» бесселевых функций, рассмотрим уравнение Лапласа в пространстве:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.16)$$

(функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются *гармоническими*).

Если перейти к цилиндрическим координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

то, согласно формуле (2.67), уравнение (4.16) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (4.17)$$

Поставим задачу: найти все такие решения уравнения (4.17), которые могут быть представлены в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, т. е. найти все решения вида

$$u = R(r)\,\Phi(\varphi)\,Z(z)$$

(R, Φ, Z предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми).

Пусть u есть решение упомянутого вида. Вставляя его в (4.17), получим:

$$R''\Phi Z + \frac{1}{r} R'\Phi Z + \frac{1}{r^2} R\Phi'' Z + R\Phi Z'' = 0,$$

откуда (после деления на $R\Phi Z$)

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Записав это в виде

$$-\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{Z''}{Z},$$

найдем, что левая часть не зависит от z, правая не зависит от r, φ; следовательно, общая величина этих выражений есть некоторая постоянная a. Отсюда

$$\frac{Z''}{Z} = a; \quad Z'' - aZ = 0;$$

$$-\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = a; \quad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + a = -\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi};$$

$$\frac{r^2R'' + rR' + ar^2R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

В последнем равенстве левая часть не зависит от φ, правая не зависит от r; следовательно, общая величина этих выражений есть некоторая постоянная b. Отсюда

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = b, \quad \Phi'' + b\Phi = 0;$$

$$\frac{r^2R'' + rR' + ar^2R}{R} = b, \quad r^2R'' + rR' + (ar^2 - b)R = 0.$$

Таким образом, R, Φ, Z должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям второго порядка

$$r^2R''+rR'+(ar^2-b)R=0, \quad \Phi''+b\Phi=0, \quad Z''-aZ=0, \tag{4.18}$$

из которых второе и третье суть простейшие линейные уравнения с постоянными коэффициентами, а первое является линейным уравнением с переменными коэффициентами нового вида.

Обратно, если R, Φ, Z удовлетворяют уравнениям (4.18), то $u=R\Phi Z$ есть решение уравнения (4.17). В самом деле, вставляя $R\Phi Z$ в левую часть (4.17) и деля затем на $R\Phi Z$, получим:

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{Z''}{Z}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}-\frac{b}{r^2}+a=$$
$$=\frac{r^2R''+rR'+(ar^2-b)R}{r^2R}=0.$$

Таким образом, общий вид всех трех решений уравнения (4.17), которые являются произведением трех функций, каждая из которых зависит от одного аргумента, есть $u=R\Phi Z$, где R, Φ, Z суть любые решения уравнений (4.18) при любом выборе чисел a, b.

Первое из уравнений (4.18) в случае $a=1$, $b\geqslant 0$ называется *уравнением Бесселя*. Полагая в этом случае $b=\nu^2$, обозначая независимое переменное буквой x (вместо r), а неизвестную функцию — буквой y (вместо R), найдем, что уравнение Бесселя имеет вид

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0. \tag{4.19}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами играет большую роль в приложениях математики. Функции, ему удовлетворяющие, называются *бесселевыми*, или *цилиндрическими*, функциями.

Бесселевы функции 1-го рода

Будем искать решение уравнения Бесселя (4.19) в виде ряда

$$y=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{\nu+k}.$$

Тогда

$$xy' = \sum_{k=0}^{+\infty} (\nu + k)\, a_k x^{\nu+k};$$

$$x^2 y'' = \sum_{k=0}^{+\infty} (\nu + k)(\nu + k - 1)\, a_k x^{\nu+k};$$

$$(x^2 - \nu^2)\, y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\nu+k+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\nu+k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} x^{\nu+k} - \nu^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\nu+k};$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} [(\nu + k)^2 - \nu^2]\, a_k x^{\nu+k} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} x^{\nu+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(2\nu + k)\, a_k x^{\nu+k} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} x^{\nu+k}.$$

Следовательно, приходим к требованию

$$(2\nu + 1)\, a_1 x^{\nu+1} + \sum_{k=2}^{+\infty} [k\,(2\nu + k)\, a_k + a_{k-2}]\, x^{\nu+k} = 0$$

или к бесконечной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(2\nu + 1)\, a_1 = 0, \\ &k\,(2\nu + k)\, a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots), \end{aligned}\right\}$$

которая распадается на две системы:

$$\left.\begin{aligned} (2\nu + 1)\, a_1 &= 0, \\ 3\,(2\nu + 3)\, a_3 + a_1 &= 0, \\ 5\,(2\nu + 5)\, a_5 + a_3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} 2\,(2\nu + 2)\, a_2 + a_0 &= 0, \\ 4\,(2\nu + 4)\, a_4 + a_2 &= 0, \\ 6\,(2\nu + 6)\, a_6 + a_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

Первая из них удовлетворится, если взять $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, ... Во второй системе a_0 можно взять произвольно; тогда a_2, a_4, a_6, ... однозначно определяются (если ν не является целым отрицательным числом). Взяв

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

найдем последовательно:

$$a_2 = -\frac{a_0}{4(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2}(\nu+1)\Gamma(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2}1!\,\Gamma(\nu+2)};$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 2(\nu+2)} = \frac{1}{2^{\nu+4}2!\,(\nu+2)\Gamma(\nu+2)} = \frac{1}{2^{\nu+4}2!\,\Gamma(\nu+3)};$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{4\cdot 3(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{\nu+6}3!\,(\nu+3)\Gamma(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{\nu+6}3!\,\Gamma(\nu+4)}$$

. . . .

и в качестве решения уравнения (4.19) получим ряд

$$y = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}x^\nu - \frac{1}{2^{\nu+2}1!\,\Gamma(\nu+2)}x^{\nu+2} +$$

$$+\frac{1}{2^{\nu+4}2!\,\Gamma(\nu+3)}x^{\nu+4} - \ldots = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2}}{1!\,\Gamma(\nu+2)} +$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4}}{2!\,\Gamma(\nu+3)} - \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Этот ряд, формально удовлетворяющий уравнению (4.19), сходится для всех положительных значений x и, следовательно, является решением уравнения (4.19) в области $0 < x < +\infty$ (в случае целого ν в области $-\infty < x < +\infty$). Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \qquad (4.20)$$

называется *бесселевой функцией 1-го рода с индексом* ν. Она является одним из решений уравнения Бесселя (4.19).

В случае целого неотрицательного индекса n, учитывая (4.4), получим:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \tag{4.20'}$$

и, в частности,

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \tag{4.20''}$$

Общее решение уравнения Бесселя

В случае *нецелого* индекса ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ являются решениями уравнения (4.19). Эти решения линейно независимы, так как начальные члены рядов, изображающих эти функции, имеют коэффициенты, отличные от нуля, и содержат разные степени x. Таким образом, в случае нецелого индекса общее решение уравнения Бесселя (4.19) есть

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x). \tag{4.21}$$

Если $\nu = -n$ (целое отрицательное число), то функция, определяемая формулой (4.20) (учитывая, что $\frac{1}{\Gamma(s)}$ равно нулю для $s = 0, -1, -2, \ldots$), принимает вид

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,(-n+k)!} \tag{4.20'''}$$

или, после замены индекса суммирования k на $l+n$,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}{(l+n)!\,l!} = (-1)^n J_n(x), \tag{4.22}$$

откуда видно, что $J_{-n}(x)$ удовлетворяет вместе с $J_n(x)$ уравнению Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0.$$

Но формула (4.21) в случае целого ν уже не дает общего решения уравнения (4.19).

Полагая

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad (\nu\text{ — не целое}) \tag{4.23}$$

и дополняя это определение для $\nu = n$ (целое число) формулой

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x), \tag{4.23'}$$

получим функцию $Y_\nu(x)$, удовлетворяющую уравнению Бесселя (4.19) и во всех случаях линейно независимую от $J_\nu(x)$ (в случае $\nu = n$, где n — целое, этот факт, как и само определение Y_n, нуждается в обоснованиях, но это мы оставляем в стороне). Функция $Y_\nu(x)$ называется *бесселевой функцией 2-го рода с индексом* ν. Общее решение уравнения Бесселя (4.19) можно записать во всех случаях в виде

$$y = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x). \tag{4.24}$$

§ 3. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ДЛЯ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Имеем:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}; \quad \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)};$$

$$\frac{d}{dx}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \qquad k = l+1;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+1}}{l!\,\Gamma(\nu+l+2)} =$$

$$= -\frac{x}{2^{\nu+1}}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}}{l!\,\Gamma(\nu+l+2)} = -x\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{x\,dx}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}. \tag{4.25}$$

Таким образом, операция $\frac{d}{x\,dx}$ (состоящая в дифференцировании с последующим умножением на $\frac{1}{x}$), примененная к $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, повышает в этом выражении индекс ν на единицу и меняет знак. Применяя эту операцию m раз, где m — любое натуральное число, получаем:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}. \tag{4.25'}$$

Имеем:

$$x^\nu J_\nu(x) = 2^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = 2^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2k}}{k!\,(\nu+k)\,\Gamma(\nu+k)};$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = 2^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(\nu+k)} =$$

$$= x \cdot 2^{\nu-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2(\nu-1)+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k)} = x \cdot x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{x\,dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x). \tag{4.26}$$

Таким образом, операция $\frac{d}{x\,dx}$, примененная к $x^\nu J_\nu(x)$, понижает в этом выражении индекс ν на единицу. Применяя эту операцию m раз, получаем:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x). \tag{4.26'}$$

Из выведенных формул можно получить некоторые следствия. Используя (4.25), получим:

$$\left(\frac{J_\nu}{x^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu}; \quad \frac{J'_\nu}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu}; \quad J'_\nu - \frac{\nu}{x} J_\nu = -J_{\nu+1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $J_0' = -J_1$. Используя (4.26), получим:

$$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1};\quad x^\nu J_\nu' + \nu x^{\nu-1} J_\nu = x^\nu J_{\nu-1};\quad J_\nu' + \frac{\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1}.$$

Почленное сложение и вычитание полученных равенств дает:

$$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}; \tag{4.27}$$

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}. \tag{4.28}$$

Формула (4.28) позволяет выразить все бесселевы функции с целыми индексами через J_0, J_1. Действительно, из (4.28) находим (полагая $\nu = n-1$):

$$J_n = \frac{2n-2}{x} J_{n-1} - J_{n-2}, \tag{4.28'}$$

откуда последовательно получаем:

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0;$$

$$J_3 = \frac{4}{x} J_2 - J_1 = \frac{4}{x}\left(\frac{2}{x} J_1 - J_0\right) - J_1 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1 - \frac{4}{x} J_0;$$

$$J_4 = \frac{6}{x} J_3 - J_2 = \frac{6}{x}\left[\left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1 - \frac{4}{x} J_0\right] - \left(\frac{2}{x} J_1 - J_0\right) = \left(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\right) J_1 + \left(-\frac{24}{x^2} + 1\right) J_0;$$

. . . .

§ 4. БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ С ПОЛУЦЕЛЫМ ИНДЕКСОМ

Бесселевы функции, вообще говоря, являются новыми трансцендентными функциями, не выражающимися через элементарные функции. Исключение составляют бесселевы функции с индексом $n + \frac{1}{2}$, где n — целое. Эти функции могут быть выражены через элементарные функции.

Имеем:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)},$$

но в силу (4.6)

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

следовательно,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}2^{k+1}}{k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{k-\frac{1}{2}}k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}}.$$

Но $2^k k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)=(2k+1)!$, следовательно,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \quad (4.29)$$

Далее, имеем:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)},$$

но в силу (4.6)

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi},$$

следовательно,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}2^k}{k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{-\frac{1}{2}+2k}}{2^{k-\frac{1}{2}}k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}.$$

Но $2^k k!\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)=(2k)!$, поэтому

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad (4.30)$$

С помощью (4.25′) находим:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=(-1)^n\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}},$$

но в силу (4.29)

$$\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x},$$

следовательно, при целом положительном n

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{\sin x}{x}. \qquad (4.29')$$

С помощью (4.26′) находим:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left[x^{-\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(x)\right]=x^{-\frac{1}{2}-n}J_{-\frac{1}{2}-n}(x),$$

но в силу (4.30)

$$x^{-\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{x};$$

следовательно, при целом положительном n

$$J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{\cos x}{x}. \qquad (4.30')$$

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ЦЕЛЫМ ИНДЕКСОМ

Производящая функция системы функций

Рассмотрим систему S функций $f_n(x)$ (с любой общей областью определения), пронумерованных с помощью всех целых чисел:

$$\ldots, f_{-2}(x), \ f_{-1}(x), \ f_0(x), \ f_1(x), \ f_2(x), \ \ldots$$

Составим ряд

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) z^n,$$

где z — комплексное переменное. Предположим, что при каждом x (принадлежащем области определения рассматриваемых функций) этот ряд имеет кольцо сходимости, содержащее внутри себя единичную окружность C (т. е. окружность с центром 0 и радиусом 1, рис. 60). В частности, это кольцо может представлять собой полную плоскость комплексного переменного без точек 0 и ∞.

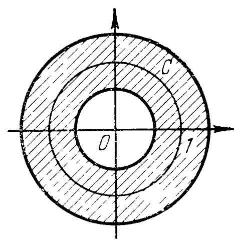


Рис. 60.

Функция

$$F(x, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) z^n \qquad (4.31)$$

(где x лежит в области определения функций системы S, z — внутри кольца сходимости, соответствующего рассматриваемому значению x) называется *производящей функцией* системы S.

Обратно, пусть задана функция $F(x, z)$, где x пробегает некоторое множество, z находится внутри некоторого кольца, зависящего от x, с центром 0 и содержащего внутри себя единичную окружность (в частности, эти кольца могут быть полной плоскостью комплексного переменного без точек 0 и ∞). Тогда, если $F(x, z)$ при каждом x аналитична относительно z внутри соответствующего кольца, то $F(x, z)$ есть производящая функция некоторой системы

15 Зак. 1944. П. И. Романовский

S функций. В самом деле, разложив при каждом x функцию $F(x, z)$ в ряд Лорана по степеням z

$$F(x, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) z^n,$$

найдем, что система коэффициентов $f_n(x)$ этого ряда будет искомой системой S.

Формулы для коэффициентов ряда Лорана (см. гл. III, § 15) позволяют выразить функции $f_n(x)$ рассматриваемой системы через производящую функцию. Применяя эти формулы и преобразовывая затем интеграл вдоль единичной окружности C (комплексное параметрическое уравнение которой есть $z = e^{i\varphi}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$) в простой интеграл, получим:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(x, z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (4.32)$$

Производящая функция системы бесселевых функций с целыми индексами

Покажем, что для системы бесселевых функций 1-го рода с целыми индексами $J_n(x)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ производящая функция есть:

$$F(x, z) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}.$$

Имеем:

$$e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2z}\right)^k}{k!}, \quad e^{\frac{xz}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^l}{l!},$$

откуда после почленного перемножения этих равенств (умножаем абсолютно сходящиеся ряды, стоящие в правой части, и соединяем в одну группу члены, содержащие одинаковые степени z) найдем:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{k,\,l}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{k+l}z^{l-k}}{k!\,l!}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^n\sum_{\substack{k\geqslant 0\ l\geqslant 0\\ l-k=n}}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{k+l}}{k!\,l!}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^n\sum_{k}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}$$

(так как в предпоследней внутренней сумме k и l были связаны зависимостью $l-k=n$, то мы могли положить $l=n+k$, получив суммирование по одному индексу k). В последней внутренней сумме суммирование производится по всем тем целым k, для которых $\begin{cases} k\geqslant 0\\ n+k\geqslant 0\end{cases}$, следовательно, при $n\geqslant 0$ это будет $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$; при $n=-m<0$ это будет $\sum\limits_{k=m}^{+\infty}$. Таким образом, во всех случаях внутренняя сумма есть $J_n(x)$ в силу формул (4.20′) и (4.20‴). Итак,

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(x)\,z^n, \tag{4.33}$$

но это и доказывает, что $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ есть производящая функция для системы $J_n(x)$.

Выведем некоторые следствия из формулы (4.33). Полагая в ней $z=e^{i\varphi}$, получим:

$$e^{ix\sin\varphi}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(x)\,e^{in\varphi},$$

откуда после разделения действительной и мнимой части [учитывая, что $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$]

$$\cos(x \sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cos n\varphi =$$

$$= J_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [J_n(x) + J_{-n}(x)] \cos n\varphi =$$

$$= J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m}(x) \cos 2m\varphi; \tag{4.33'}$$

$$\sin(x \sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \sin n\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} [J_n(x) - J_{-n}(x)] \sin n\varphi =$$

$$= 2\sum_{m=0}^{+\infty} J_{2m+1}(x) \sin(2m+1)\varphi. \tag{4.33''}$$

Заменяя в (4.33′) и (4.33″) φ на $\frac{\pi}{2} - \varphi$, найдем:

$$\cos(x \cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m J_{2m}(x) \cos 2m\varphi; \tag{4.33'''}$$

$$\sin(x \cos\varphi) = 2\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x) \cos(2m+1)\varphi. \tag{4.33''''}$$

Интегральное представление $J_n(x)$

Так как, по доказанному, при $f_n(x) = J_n(x)$ имеем $F(x, z) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$, то по формуле (4.32) получаем используя в преобразованиях формулы Эйлера):

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} e^{-in\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi - in\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi,$$

где принято во внимание, что $\cos(x\sin\varphi - n\varphi)$ есть четная функция от φ, $\sin(x\sin\varphi - n\varphi)$ есть нечетная функция от φ. Итак, доказано, что для любого целого числа $n\left(\gtreqless 0\right)$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi. \tag{4.34}$$

Формула (4.34) дает представление бесселевых функций с целым индексом в виде определенного интеграла, зависящего от параметра x. Эта формула называется *интегральным представлением Бесселя* для $J_n(x)$, правая часть формулы называется *интегралом Бесселя*. В частности, при $n = 0$ найдем:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi. \tag{4.34'}$$

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ЦЕЛЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА

Пусть $\varphi(x)$ — положительная функция и $f(x)$ — какая-нибудь (вообще комплекснозначная) функция, определенные для достаточно больших значений x. Запись

$$f(x) = O[\varphi(x)] \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

означает, что найдутся такие числа x_0 и M, что при $x > x_0$ имеем $|f(x)| < M\varphi(x)$.

Подобная запись употребляется и в других аналогичных случаях. Например, если $\Phi(t)$ — положительная функция и $F(t)$ — какая-нибудь функция, определенные для достаточно малых положительных значений t, то запись

$$F(t) = O[\Phi(t)] \quad \text{при} \quad t \to 0$$

означает, что найдутся такие числа ε и M, что $|F(t)| < M\Phi(t)$ на $(0, \varepsilon)$.

Вспомогательная лемма

Если $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, то для функции

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t}} f(t)\, dt$$

имеет место асимптотическое представление

$$F(x) = \frac{e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi x}} f(1) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Докажем эту лемму. Заменяя t на $1-t$, получим:

$$F(x) = \frac{e^{ix}}{\pi} \int_0^1 e^{-ixt} \frac{f(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{e^{ix}}{\pi} f(1) \int_0^1 \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{t}}\, dt + \\ + \frac{e^{ix}}{\pi} \int_0^1 e^{-ixt} \frac{f(1-t) - f(1)}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{4.35}$$

Рассмотрим интеграл, фигурирующий в первом слагаемом правой части формулы (4.35). Заменяя xt на t, найдем:

$$\int_0^1 \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\, dt - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\, dt,$$

но, заменив t на t^2 [учитывая формулу (3.59′) гл. III], получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\, dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-it^2}\, dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Если $\psi(x)$ положительна, убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $\int_x^{+\infty} \psi(t) \cos t\, dt$ и $\int_x^{+\infty} \psi(t) \sin t\, dt$, а следовательно, и $\int_x^{+\infty} \psi(t) e^{-it}\, dt$ суть $O[\psi(x)]$ при $x \to +\infty$ (это видно из выкладок соответствующего пункта следующего параграфа), поэтому

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\,dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ при } x \to +\infty,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\,dt = O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

Итак, получаем асимптотическое представление:

$$\int_0^1 \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty. \tag{4.36}$$

Рассмотрим теперь интеграл, фигурирующий во втором слагаемом правой части формулы (4.35). Имеем:

$$\int_0^1 e^{-ixt}\, \frac{f(1-t)-f(1)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 e^{-ixt} \varphi(t) \sqrt{t}\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{f(1-t)-f(1)}{t}.$$

Очевидно $\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(0, 1]$, но, как легко видеть, существуют $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t)$ и $\lim\limits_{t \to 0} \varphi'(t)$, поэтому $\varphi(t)$ (после доопределения в точке $t = 0$) становится непрерывно дифференцируемой на сегменте $[0, 1]$. Интегрирование по частям дает:

$$\int_0^1 e^{-ixt}\varphi(t)\sqrt{t}\,dt = -\frac{e^{-ixt}}{ix}\varphi(t)\sqrt{t}\,\Big|_0^1 + \frac{1}{ix}\int_0^1 e^{-ixt}\,[\varphi(t)\sqrt{t}]'\,dt$$

где первое слагаемое правой части, $-\frac{e^{-ix}}{ix}\varphi(1)$, есть $O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, а интеграл во втором слагаемом (несобственный при нижнем пределе) мажорируется интегралом

$$\int_0^1 |[\varphi(t)\sqrt{t}]'|\,dt,$$

который сходится, так как

$$[\varphi(t)\sqrt{t}]' = \frac{\varphi'(t)\,t + \frac{1}{2}\varphi(t)}{\sqrt{t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{при} \quad t \to 0;$$

следовательно, второе слагаемое есть тоже $O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.

Итак, имеем:

$$\int_0^1 e^{-ixt}\,\frac{f(1-t)-f(t)}{\sqrt{t}}\,dt = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{4.37}$$

Из (4.35), (4.36), (4.37) получаем искомое асимптотическое представление:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t}}\,f(t)\,dt = \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi x}}\,f(1) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{4.38}$$

Из этой формулы, переходя к сопряженным величинам, найдем еще:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{1-t}}\,f(t)\,dt = \frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi x}}\,f(1) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{4.38'}$$

Формулы (4.38), (4.38′) верны и для комплекснозначных функций $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ [ибо они верны для $f_1(t)$ и $f_2(t)$].

Вывод асимптотической формулы для $J_n(x)$

В конце § 5 мы видели, что

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi - in\varphi}\,d\varphi.$$

Заменяя φ на $\frac{\pi}{2} - \varphi$, получим:

$$J_n(x) = \frac{e^{-\frac{in\pi}{2}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\varphi + in\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{e^{-\frac{in\pi}{2}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\varphi}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,d\varphi = \frac{e^{-\frac{in\pi}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi$$

(учитывая, что $e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi$ есть четная функция от φ, а $e^{ix\cos\varphi}\sin n\varphi$ есть нечетная функция от φ). Подстановка $\cos\varphi = t$ дает:

$$J_n(x) = \frac{e^{-\frac{in\pi}{2}}}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixt}\frac{\cos(n\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^{-\frac{in\pi}{2}}}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixt}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

где $T_n(t) = \cos(n\arccos t)$ есть, очевидно, полином n-й степени (полином Чебышева), так как из формулы Муавра видно, что $\cos n\varphi$ есть полином n-й степени относительно $\cos\varphi$. Но

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixt}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}$$

и, заменяя в первом из этих интегралов t на $-t$, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixt}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} e^{-ixt}\frac{T_n(-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} e^{ixt}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{1-t}}\,\frac{T_n(-t)}{\sqrt{1+t}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t}}\,\frac{T_n(t)}{\sqrt{1+t}}\,dt.$$

Так как $\frac{T_n(-t)}{\sqrt{1+t}}$ и $\frac{T_n(t)}{\sqrt{1+t}}$ на $[0, 1]$ имеют производные всех порядков, то к двум последним интегралам применимы формулы (4.38′) и (4.38) и мы получаем:

$$J_n(x) = e^{-\frac{in\pi}{2}}\left[\frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi x}}\cdot\frac{T_n(-1)}{\sqrt{2}} + \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi x}}\,\frac{T_n(1)}{\sqrt{2}}\right] + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

но

$$T(-1) = \cos n\pi = (-1)^n = e^{in\pi}; \quad T(1) = \cos 0 = 1,$$

следовательно,

$$J_n(x) = \frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)} + e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Итак, имеем искомое *асимптотическое представление* бесселевой функции 1-го рода с целым индексом для *больших значений аргумента*:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{4.39}$$

Эта формула показывает, что $J_n(x)$ с точностью до слагаемого порядка $\frac{1}{x}$ является затухающей гармоникой с вол-

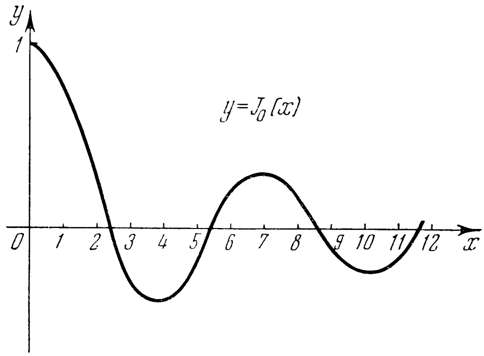


Рис. 61.

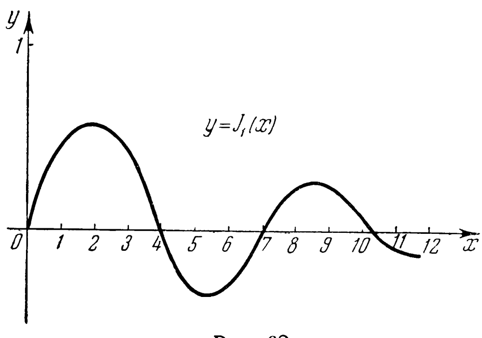


Рис. 62.

ной постоянной длины и амплитудой, убывающей обратно пропорционально квадратному корню из абсциссы.

В частности,

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty; \qquad (4.39')$$

$$J_1(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty. \qquad (4.39'')$$

Графики этих функций изображены на рис. 61 и 62.

§ 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ, ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС, ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

Известно, что интегралы $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ не выражаются через элементарные функции и являются новыми трансцендентными функциями. Эти функции (определенные пока с точностью до произвольного постоянного слагаемого) обозначаются соответственно знаками $\operatorname{li} x$, $\operatorname{si} x$, $\operatorname{ci} x$.

Разложения в ряды

Делая в равенстве $\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$ подстановку $x = e^t$, получим:

$$\operatorname{li} e^t = \int \frac{e^t}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots\right) dt =$$
$$= \ln t + C + t + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \ldots \qquad (t > 0),$$

откуда (после возвращения к старому аргументу x)

$$\operatorname{li} x = \ln \ln x + C + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots \quad (x > 1). \qquad (4.40)$$

Далее,

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right) dx,$$

откуда после почленного интегрирования находим:

$$\operatorname{si} x = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots \qquad (4.41)$$

Наконец,

$$\operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots\right) dx,$$

откуда после почленного интегрирования получаем:

$$\operatorname{ci} x = C + \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \ldots \quad (x > 0). \quad (4.42)$$

Добавления к технике интегрирования

Подстановка $x - a = t$ дает:

$$\int \frac{e^x}{x-a}\, dx = e^a \int \frac{e^t}{t}\, dt = e^a \operatorname{li} e^t = e^a \operatorname{li} e^{x-a}.$$

Интегрирование по частям дает формулу приведения:

$$\int \frac{e^x}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{e^x}{(n-1)(x-a)} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{(x-a)^{n-1}}\, dx.$$

Подстановка $x - a = t$ дает:

$$\int \frac{\sin x}{x-a}\, dx = \int \frac{\sin(t+a)}{t}\, dt = \cos a \operatorname{si} t + \sin a \operatorname{ci} t =$$
$$= \cos a \operatorname{si}(x-a) + \sin a \operatorname{ci}(x-a);$$

$$\int \frac{\cos x}{x-a}\, dx = \int \frac{\cos(t+a)}{t}\, dt = \cos a \operatorname{ci} t - \sin a \operatorname{si} t =$$
$$= \cos a \operatorname{ci}(x-a) - \sin a \operatorname{si}(x-a).$$

Интегрирование по частям дает формулы приведения

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{(x-a)^{n-1}}\, dx;$$

$$\int \frac{\cos x}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{(x-a)^{n-1}}\, dx.$$

Учитывая, что всякая рациональная функция есть сумма полинома и простейших элементов вида $\frac{A}{(x-a)^n}$, заключаем на основании установленных формул, что интегралы вида

$$\int R(x)\, e^x\, dx, \quad \int R(x) \sin x\, dx, \quad \int R(x) \cos x\, dx$$

станут «берущимися», если к элементарным функциям добавить интегральный логарифм, интегральный синус и интегральный косинус [если мы хотим оставаться полностью в действительной области, то ограничимся такими рациональными дробями $R(x)$, знаменатели которых имеют только действительные корни].

О сходимости некоторых несобственных интегралов

Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная убывающая функция при $a \leqslant x < +\infty$, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin x\, dx$; $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cos x\, dx$ сходятся.

Не нарушая общности доказательства, можем положить $a = 0$ (в случае $a > 0$ можно $f(x)$ доопределить на участке $0 \leqslant x < a$ так, что при $0 \leqslant x < +\infty$ будут выполнены все поставленные условия), при $b > 0$ имеем:

$$\int\limits_0^b f(x) \sin x\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \sin x\, dx + \int\limits_{n\pi}^{b} f(x) \sin x\, dx,$$

где n — наибольшее целое число такое, что $n\pi \leqslant b$. Очевидно, $n \to +\infty$ при $b \to +\infty$. Подстановка $x = t + k\pi$ дает:

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \sin x\, dx = (-1)^k \int\limits_0^{\pi} f(t + k\pi) \sin t\, dt = (-1)^k c_k,$$

где

$$c_k = \int\limits_0^{\pi} f(t + k\pi) \sin t\, dt > 0.$$

Из убывания функции $f(x)$ следует, что при $k < l$ имеем:

$$f(t + k\pi) > f(t + l\pi).$$

Умножая это неравенство на $\sin t$ и интегрируя от 0 до π, найдем $c_k > c_l$. Из того, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ следует, что $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, ибо

$$c_k < f(k\pi) \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2f(k\pi).$$

Далее,

$$|r(b)| = \left| \int_{n\pi}^{b} f(x) \sin x\, dx \right| < 2f(n\pi)$$

и, следовательно, $r(b) \to 0$ при $b \to +\infty$. Таким образом,

$$\int_0^b f(x) \sin x\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k + r(b),$$

где

$$c_0 > c_1 > c_2 > \ldots; \quad c_n \to 0; \quad r(b) \to 0.$$

Принимая во внимание теорему Лейбница о знакочередующихся рядах, заключаем, что

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x) \sin x\, dx = \sum_0^{\infty} (-1)^k c_k$$

и, следовательно, несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x\, dx$$

сходится, что и требовалось доказать.

Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cos x\, dx$$

после подстановки $x = t + \frac{\pi}{2}$ приводится к предыдущему.

Нормировка интегрального синуса и интегрального косинуса

Из сказанного следует, что

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad (a > 0)$$

суть сходящиеся интегралы. Поэтому $\operatorname{si} x$ и $\operatorname{ci} x$ при $x \to +\infty$ стремятся к конечным пределам. Нормировку $\operatorname{si} x$ и $\operatorname{ci} x$ (напомним, что эти функции определены пока с точностью до произвольного постоянного слагаемого) можно, например, определить требованиями $\operatorname{si}(+\infty) = 0$; $\operatorname{ci}(+\infty) = 0$. Тогда (при $a > 0$)

$$\operatorname{si} x = \int_a^x \frac{\sin t}{t}\,dt + C_1; \qquad \operatorname{ci} x = \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt + C_2;$$

$$\operatorname{si}(+\infty) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt + C_1 = 0;$$

$$\operatorname{ci}(+\infty) = \int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt + C_2 = 0;$$

$$C_1 = -\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt; \qquad C_2 = -\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt;$$

$$\operatorname{si} x = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt; \qquad \operatorname{ci} x = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Укажем еще другую нормировку $\operatorname{si} x$, определяя ее требованием $\operatorname{si} 0 = 0$ (для $\operatorname{ci} x$ подобная нормировка не имеет смысла, так как $\operatorname{ci} x \to \infty$ при $x \to 0$). Тогда

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \tag{4.43}$$

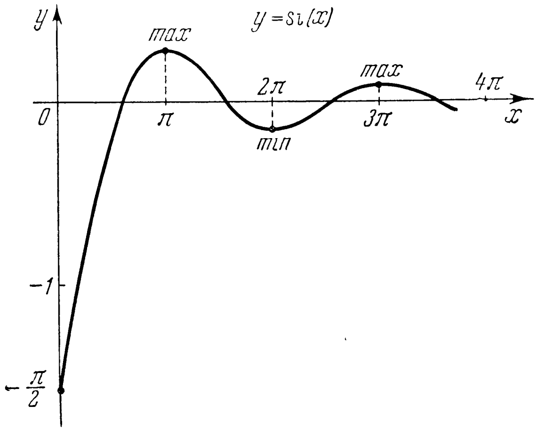

y
y = si(x)
max
max
2π
4π
0
π
3π
x
min
−1
−π/2

Рис. 63.

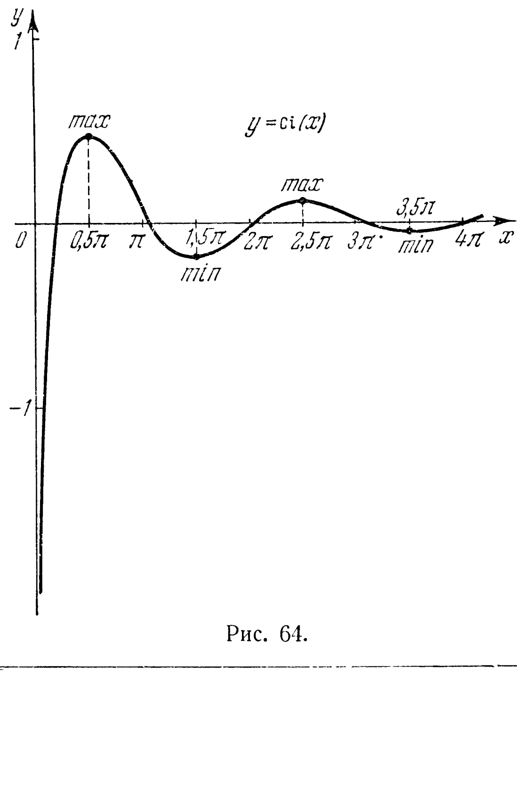

y
1
max
y = ci(x)
max
3,5π
0
0,5π
π
1,5π
2π
2,5π
3π
min
4π
x
min
−1

Рис. 64.

Учитывая, что $(\operatorname{si} x)' = \frac{\sin x}{x}$, найдем, что $\operatorname{si} x$ возрастает на $(0, \pi)$, убывает на $(\pi, 2\pi)$, возрастает на $(2\pi, 3\pi)$, убывает на $(3\pi, 4\pi), \ldots$ в точках $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$ имеет экстремумы. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(см. гл. I, § 8), заключаем что, $\operatorname{si} x \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$. Кривая $y = \operatorname{si} x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$, при $x \to +\infty$ бесконечно много раз пересекает эту асимптоту, находясь то выше, то ниже ее.

На рис. 63 и 64 изображены графики интегрального синуса и интегрального косинуса при нормировках $\operatorname{si}(+\infty) = 0$; $\operatorname{ci}(+\infty) = 0$.

В случае нормировки $\operatorname{si} 0 = 0$ изображенный на фиг. 63 график интегрального синуса следует сдвинуть вверх на $\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Замечания о несобственных интегралах

Если $f(t)$ — комплекснозначная функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$, за исключением точки a (в которой она может быть не определена и вблизи которой может быть не ограничена), то по определению $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(t)\,dt$, если этот предел существует и конечен. Аналогично, если $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$, за исключением точки b, то по определению $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(t)\,dt$, если этот предел существует и конечен.

Если $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$, за исключением точек a и b, то по определению $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^c f(t)\,dt + \int\limits_c^b f(t)\,dt$, где $a < c < b$, если оба слагаемых в правой части имеют смысл (очевидно, это определение не зависит от выбора числа c).

Если $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек $c_1, c_2, \ldots, c_p$, где $a \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_p \leqslant b$, то по определению $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^{c_1} + \int\limits_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int\limits_{c_p}^{b}$, если все слагаемые правой части имеют смысл.

Пусть теперь $f(t)$ непрерывна на $[a, +\infty)$, за исключением, быть может, изолированных точек *). Тогда по определению $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_a^l f(t)\,dt$, если все интегралы $\int\limits_a^l$, где $l > a$, существуют и если $\lim\limits_{l\to+\infty} \int\limits_a^l$ существует и конечен. В этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ называется *сходящимся*.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ называется *абсолютно сходящимся*. Абсолютно сходящийся несобственный интеграл всегда сходится. Очевидно, $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ абсолютно сходится, если $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$ (при $t \geqslant a$, за исключением, быть может, изолированных точек), где $\varphi(t)$ — такая действительная неотрицательная функция, что $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ сходится. В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *мажорируется* несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

Пусть $f(t, p)$ при каждом значении параметра p в некоторой области D является непрерывной функцией от t

*) Мы говорим, что некоторый факт имеет место на некотором данном интервале, *за исключением, быть может, изолированных точек*, если на каждом сегменте, лежащем на данном интервале, может находиться не более конечного числа точек, в которых рассматриваемый факт не имеет места.

на $[a, +\infty)$, за исключением, быть может, изолированных точек. Если при каждом значении p в D интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$ сходится и $\int\limits_a^{l} f(t, p)\,dt$ при $l \to +\infty$ стремится к своему пределу равномерно относительно p в D, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$, зависящий от параметра p, называется *равномерно сходящимся* в области D. Достаточным условием равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра, является мажорируемость его сходящимся интегралом от некоторой неотрицательной функции. Если D — область на плоскости комплексного переменного p, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$ будем называть *равномерно сходящимся внутри* области D, если он равномерно сходится на каждой ограниченной замкнутой области Δ, лежащей в D (см. гл. III, § 13).

Аналитическая зависимость от параметра

Лемма. Пусть $f(t, p)$ — непрерывная комплекснозначная функция двух переменных t, p: действительного переменного t на сегменте $[a, b]$ и комплексного переменного p в области D. Пусть эта функция при каждом значении t на $[a, b]$ является аналитической функцией от p в области D. Тогда $f'_p(t, p)$ обладает такими же свойствами и функция

$$F(p) = \int\limits_a^b f(t, p)\,dt$$

будет аналитической функцией от p в D, причем

$$F'(p) = \int\limits_a^b f'_p(t, p)\,dt.$$

Доказательство. Тот факт, что $f'_p(t, p)$ есть непрерывная функция от t, p, проверяется так: при $t_n \to t$ имеем $f(t_n, p) \to f(t, p)$ равномерно внутри D (ибо $f(t, p)$ равномерно непрерывна при t

на $[a, b]$ и p на Δ, где Δ — какая-либо ограниченная замкнутая область в D), следовательно, в силу теоремы § 13 главы III имеем $f'_p(t_n, p) \to f'_p(t, p)$ равномерно внутри D, откуда видно, что при $\begin{cases} t_n \to t \\ p_n \to p \end{cases}$ будем иметь $f'_p(t_n, p_n) \to f'_p(t, p)$.

Далее, имеем $F(p) = \lim \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(t_k, p)\,\Delta t_k$ при $\max \Delta t_k \to 0$ (рис. 65), причем сходимость — равномерная внутри области D. Действительно,

$$F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, p)\,\Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, p)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, p)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t, p) - f(t_k, p)]\,dt,$$

но $f(t, p)$ равномерно непрерывна при t на $[a, b]$ и p на Δ, где Δ — какая-либо ограниченная замкнутая область в D, поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что если $|\Delta t_k| < \eta$, то $|f(t, p) - f(t_k, p)| < \varepsilon$ при

$$\begin{cases} t_k \leqslant t \leqslant t_k + \Delta t_k, \\ p \text{ на } \Delta, \end{cases}$$

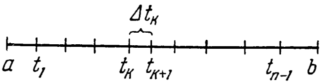


Рис. 65.

следовательно, при $\max \Delta t_k < \eta$ и любом p на Δ будем иметь:

$$\left| F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, p)\,\Delta t_k \right| < \varepsilon\,(b - a),$$

что и доказывает равномерную сходимость $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(t_k, p)\,\Delta t_k$ к $F(p)$ внутри области D.

Наконец, в силу теоремы § 13 главы III $F(p)$ будет аналитической функцией от p в области D, причем

$$F'(p) = \lim \frac{d}{dp}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, p)\,\Delta t_k\right] =$$

$$= \lim \sum_{k=0}^{n-1} f'_p(t_k, p)\,\Delta t_k = \int\limits_a^b f'_p(t, p)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть $f(t, p)$ — непрерывная комплекснозначная функция двух переменных t, p: действительного переменного t на $[a, +\infty)$, кроме, быть может, изолированных точек, и комплексного переменного p в области D. Пусть, кроме того, эта функция при каждом упомянутом значении t будет аналитической от p в области D. Предположим еще, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$ на каждой ограниченной замкнутой области Δ, лежащей в D, мажорируется некоторым сходящимся интегралом от действительной неотрицательной функции. Тогда

$$F(p) = \int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$$

будет аналитической функцией от p в области D, причем

$$F'(p) = \int\limits_a^{+\infty} f'_p(t, p)\,dt.$$

Доказательство. Если сегмент $[c, d]$, лежащий на $[a, +\infty)$, не содержит упоминавшихся в тексте теоремы изолированных точек, то в силу леммы $\int\limits_c^d f(t, p)\,dt$ будет аналитической функцией от p в D, производная которой равна $\int\limits_c^d f'_p(t, p)\,dt$. Если c (или d) стремится к одной из названных изолированных точек c_0 (или d_0), то в силу условий теоремы $\int\limits_c^d f(t, p)\,dt \to \int\limits_{c_0}^d f(t, p)\,dt$ $\left(\text{или к } \int\limits_c^{d_0}\right)$ равномерно внутри D, поэтому в силу теоремы § 13 главы III производная от $\int\limits_{c_0}^d f(t, p)\,dt$ $\left(\text{или } \int\limits_c^{d_0}\right)$ будет равна $\int\limits_{c_0}^d f'_p(t, p)\,dt$ $\left(\text{или } \int\limits_c^{d_0}\right)$. После этого заключаем, что при любом $l > a$ производная от $\int\limits_a^l f(t, p)\,dt$ будет равна $\int\limits_a^l f'_p(t, p)\,dt$.

Наконец, в силу условий теоремы $\int\limits_a^l f(t, p)\,dt \to \int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$ равномерно внутри D, следовательно, в силу теоремы § 13 главы III производная от $\int\limits_a^{+\infty} f(t, p)\,dt$ будет равна $\int\limits_a^{+\infty} f'_p(t, p)\,dt$, что и требовалось доказать.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Пусть $f(t)$ — комплекснозначная функция, непрерывная на $[0, +\infty)$, за исключением, быть может, изолированных точек. Если действительное число s обладает тем свойством, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-st}\,dt$ сходится, то числа, большие s, также им обладают. Отсюда следует (рассуждая, как в § 3 главы III при введении понятия радиуса сходимости степенного ряда), что либо найдется такое действительное число s_0, что при $s > s_0$ упомянутый несобственный интеграл сходится, а при $s < s_0$ расходится [число s_0 назовем *показателем роста* функции $f(t)$], либо для всех действительных s упомянутый несобственный интеграл сходится (тогда показатель роста функции $f(t)$ считаем равным $-\infty$), либо для всех действительных s он расходится [тогда показатель роста функции $f(t)$ считаем равным $+\infty$].

Если показатель роста $f(t)$ меньше $+\infty$ [будем говорить в этом случае, что $f(t)$ имеет *ограниченный рост*], то $f(t)$ абсолютно интегрируема на каждом сегменте $[0, a]$, где $a > 0$.

В качестве примера отметим, что если $f(t)$ на $[0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству $|f(t)| \leqslant Me^{st}$, то $f(t)$ имеет ограниченный рост и показатель роста $\leqslant s$. В самом деле, тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-(s+\varepsilon)\,t}\,dt$ при всяком $\varepsilon > 0$ сходится, ибо он мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_0^{+\infty} Me^{-\varepsilon t}\,dt = \frac{M}{\varepsilon}$.

Если $f(t)$ имеет ограниченный рост, то

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

является аналитической функцией комплексного переменного p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 — показатель роста $f(t)$ (числа s_0 называют еще *абсциссой абсолютной сходимости интеграла Лапласа* $\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$). В самом деле, упомянутый интеграл равномерно сходится в каждой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant s_1$, где $s_1 > s_0$, ибо на ней он мажорируется сходящимся интегралом $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-s_1 t}\,dt$; значит, рассматриваемый интеграл подавно равномерно сходится внутри области $\operatorname{Re} p > s_0$ и, следовательно, по теореме § 1 является аналитической функцией в этой области.

Определение. Комплекснозначную функцию $f(t)$, непрерывную на $[0, +\infty)$, за исключением, быть может, изолированных точек, и имеющую ограниченный рост, назовем *оригиналом*. Аналитическую функцию $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определенную формулой $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$ при $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0—показатель роста $f(t)$, назовем *изображением* оригинала $f(t)$. Преобразование, относящее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$,

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt, \tag{5.1}$$

называется *преобразованием Лапласа*. При этом пишут:

$$f(t) \risingdotseq F(p). \tag{5.2}$$

Употребляется еще обозначение

$$L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{5.3}$$

(L — знак преобразования Лапласа).

Мы дали здесь более узкое определение оригинала, чем это принято в общей теории преобразования Лапласа, чтобы в дальнейших выкладках иметь дело лишь с такими понятиями интеграла, которые даются в элементарных общих курсах математического анализа. Такие оригиналы достаточны для практических надобностей.

Замечания. Если встречается надобность продолжить оригинал $f(t)$ на отрицательные значения t, то полагают $f(t)=0$ при $t<0$.

Если $\lim\limits_{t\to+0} f(t)$ существует и конечен, то обозначим его $f(+0)$, если $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ существует и конечен, то обозначим его $f(+\infty)$.

Если $f(t)$ — оригинал, то, очевидно, $|f(t)|$ будет оригиналом с тем же показателем роста.

Линейная комбинация оригиналов, очевидно, есть оригинал. Если $f(t)$ — оригинал, то, очевидно, $f(\alpha t)$ (α — положительное число), $tf(t)$, $f(t-\tau)$ (τ — действительное число, $e^{\lambda t}f(t)$ (λ — комплексное число) то же будут оригиналами.

Покажем еще, что если $f(t)$—оригинал, то $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(u)\,du$ будет непрерывным на $[0, +\infty)$ оригиналом.

Непрерывность $\varphi(t)$ следует из абсолютной интегрируемости f на каждом сегменте $[0, a]$, где $a>0$. Далее, если s_0 — показатель роста f, s_1 — положительное число, большее s_0, $s>s_1$, то в случае $f(t)\geqslant 0$ имеем:

$$\varphi(t)\,e^{-st}=e^{-st}\int\limits_0^t f(u)\,du=e^{-(s-s_1)\,t}\int\limits_0^t f(u)\,e^{-s_1 t}\,du\leqslant$$

$$\leqslant e^{-(s-s_1)\,t}\int\limits_0^{+\infty} f(u)\,e^{-s_1 u}\,du,$$

откуда видно, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-st}\,dt$ сходится и φ есть оригинал.

Если теперь f — комплекснозначная функция, то

$$|\varphi(t)| \leqslant \int_0^t |f(u)|\,du,$$

но правая часть по доказанному есть оригинал, следовательно, $\varphi(t)$ подавно оригинал, что и требовалось доказать.

Теорема. Если $F(p)$ есть изображение, то $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$\int_0^\eta |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $s > 0$ имеем:

$$\int_0^\eta |f(t)|\,e^{-st}\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\operatorname{Re} p = s > s_1$, где s_1 — число, большее показателя роста $f(t)$. Тогда

$$\int_\eta^{+\infty} |f(t)|\,e^{-st}\,dt = \int_\eta^{+\infty} |f(t)|\,e^{-s_1 t} \cdot e^{-(s-s_1)t}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{-(s-s_1)\eta} \int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-s_1 t}\,dt,$$

что $< \frac{\varepsilon}{2}$ при s достаточно большом.

Следовательно, при достаточно большом $\operatorname{Re} p = s$ имеем:

$$|F(p)| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-st}\,dt = \int_0^\eta + \int_\eta^{+\infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Можно показать, что оригинал вполне определяется своим изображением (если функции, отличающиеся лишь в изолированных точках, считать эквивалентными). Если ограничиться оригиналами, дифференцируемыми всюду, за исключением, быть может, изолированных точек, то этот факт будет следовать из теоремы обращения преобразования Лапласа, доказываемой в § 9.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Однородность. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\lambda f(t) \risingdotseq \lambda F(p) \quad (\lambda \text{ — любое комплексное число}).$$

В самом деле,

$$L[\lambda f(t)] = \int\limits_0^{+\infty} \lambda f(t) e^{-pt} dt = \lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lambda L[f(t)].$$

2. Аддитивность. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$f(t) + \varphi(t) \risingdotseq F(p) + \Phi(p).$$

В самом деле,

$$L[f(t) + \varphi(t)] = \int\limits_0^{+\infty} [f(t) + \varphi(t)] e^{-pt} dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = L[f(t)] + L[\varphi(t)].$$

3. Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\alpha \text{ — любое положительное число}).$$

В самом деле,

$$L[f(\alpha t)] = \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-\frac{pt}{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и если $f'(t)$ есть оригинал [тогда $f(t)$ тоже оригинал и $f(+0)$ существует], то из $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0).$$

В самом деле, интегрирование по частям дает при $0<a<b<+\infty$

$$\int_a^b f'(t)\,e^{-pt}\,dt = f(t)\,e^{-pt}\Big|_a^b + p\int_a^b f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Если $\operatorname{Re} p$ больше показателя роста $f(t)$, то модуль $f(t)\,e^{-pt}$ не может для всех достаточно больших t оставаться больше некоторого положительного числа, поэтому найдется такая последовательность положительных t_n, что $t_n \to +\infty$, $f(t_n)\,e^{-pt_n} \to 0$. Беря теперь $a=\frac{1}{n}$, $b=t_n$ и переходя к пределу в вышенаписанном равенстве, получим при $\operatorname{Re} p$, большем показателей роста $f(t)$ и $f'(t)$:

$$L[f'(t)] = -f(+0) + pF(p).$$

5. Обобщение. Если $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и если $f^{(n)}(t)$ есть оригинал [тогда $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ — тоже оригиналы и $f(+0), f'(+0), \ldots$ $\ldots, f^{(n-1)}(+0)$ существуют], то из $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - f(+0)\,p^{n-1} - \\ - f'(+0)\,p^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

В самом деле, это получается из свойства 4 по индукции. При $n=1$ утверждение справедливо по свойству 4. Если утверждение справедливо для $n-1$, то

$$f^{(n-1)}(t) \risingdotseq p^{n-1}F(p) - f(+0)\,p^{n-2} - \ldots - f^{(n-2)}(+0).$$

Отсюда по свойству 4

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p\,[p^{n-1}F(p) - f(+0)\,p^{n-2} - \ldots - f^{(n-2)}(+0)] - \\ - f^{(n-1)}(+0) = p^n F(p) - f(+0)\,p^{n-1} - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

6. Умножение оригинала на минус аргумент (дифференцирование изображения). Если $f(t) \risingdotseq$ $\risingdotseq F(p)$, то

$$-tf(t) \risingdotseq F'(p).$$

В самом деле,

$$L[-tf(t)] = \int_0^{+\infty} -tf(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = F'(p).$$

7. Обобщение. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p).$$

В самом деле, это получается из свойства 6 по индукции. При $n=1$ утверждение справедливо по свойству 6. Если утверждение справедливо для $n-1$, то

$$(-1)^{n-1} t^{n-1} f(t) \risingdotseq F^{(n-1)}(p),$$

откуда по свойству 6

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq [F^{(n-1)}(p)]' = F^{(n)}(p).$$

8. Интегрирование оригинала. Если $f(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(u)\, du \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

В самом деле, пусть $\varphi(t) = \int_0^t f(u)\, du \risingdotseq \Phi(p)$, тогда $\varphi(+0) = 0$ и по свойству 4 имеем $f(t) \risingdotseq p\Phi(p)$; следовательно, $p\Phi(p) = F(p)$; $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

9. Деление оригинала на аргумент (интегрирование изображения). Если $\dfrac{f(t)}{t}$ есть оригинал [тогда $f(t)$ тоже оригинал], то из $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(q)\, dq \quad \left(\text{где } \int_p^{\infty} = \lim_{\operatorname{Re} P \to +\infty} \int_p^{P}\right).$$

В самом деле, пусть $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \Phi(p)$, тогда по свойству 6 $f(t) \risingdotseq -\Phi'(p)$; следовательно, $-\Phi'(p) = F(p)$. Интегрируя это равенство в пределах от p до P, найдем:

$$\Phi(p)-\Phi(P)=\int_p^P F(q)\,dq;$$

следовательно, в пределе при $\operatorname{Re} P\to+\infty$ [учитывая, что тогда $\Phi(P)\to 0$] получим:

$$\Phi(p)=\int_0^\infty F(q)\,dq.$$

10. Запаздывание. Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$f(t-\tau)\risingdotseq e^{-p\tau}F(p) \quad (\tau \text{ — любое положительное число}).$$

В самом деле,

$$L[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)\,e^{-pt}\,dt=\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)\,e^{-pt}\,dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-p(t+\tau)}\,dt=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt=e^{-p\tau}F(p).$$

11. Умножение оригинала на показательную функцию (смещение изображения). Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$e^{\lambda t}f(t)\risingdotseq F(p-\lambda) \quad (\lambda \text{ — любое комплексное число}).$$

В самом деле,

$$L[e^{\lambda t}f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{\lambda t}e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-(p-\lambda)t}\,dt=F(p-\lambda).$$

§ 4. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ

Формула Дирихле

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в треугольнике D: $a \leqslant y \leqslant \leqslant x \leqslant b$ (рис. 66).

Преобразуя двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ двумя способами в двукратный и сравнивая результаты, получим искомую формулу Дирихле:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\,dx. \tag{5.4}$$

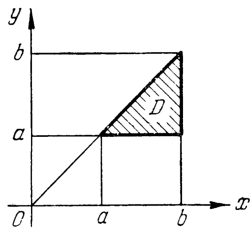


Рис. 66.

Свертка функций

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные, комплекснозначные функции на $[0, +\infty)$. *Сверткой* функций f и φ называется функция, обозначаемая $f * \varphi$ и определяемая равенством

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(u)\,\varphi(t-u)\,du.$$

Это будет непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Очевидно,

$$|f * \varphi| \leqslant |f| * |\varphi|.$$

При $a > 0$ с помощью формулы Дирихле находим:

$$\int_0^a (f * \varphi)(t)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^a e^{-pt}\,dt \int_0^t f(u)\,\varphi(t-u)\,du =$$

$$= \int_0^a f(u)\,du \int_u^a \varphi(t-u)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^a f(u)\,du \int_0^{a-u} \varphi(t)\,e^{-p(t+u)}\,dt =$$

$$= \int_0^a f(u)\,e^{-pu}\,du \int_0^{a-u} \varphi(t)\,e^{-pt}\,dt;$$

следовательно, если записать внутренний интеграл $\int\limits_0^{a-u}$. в виде $\int\limits_0^a - \int\limits_{a-u}^a$, получим формулу

$$\int\limits_0^a (f * \varphi)(t)\, e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^a f(t)\, e^{-pt}\, dt \cdot \int\limits_0^a \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt - \\ - \int\limits_0^a f(u)\, e^{-pu}\, du \int\limits_{a-u}^a \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt. \qquad (5.5)$$

Из (5.5) следует, что при $f \geqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$ и действительном s

$$\int\limits_0^a (f * \varphi)(t)\, e^{-st}\, dt \leqslant \int\limits_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt \int\limits_0^a \varphi(t)\, e^{-st}\, dt;$$

следовательно, при комплекснозначных f и φ и действительном s

$$\int\limits_0^a |(f * \varphi)(t)|\, e^{-st}\, dt \leqslant \int\limits_0^a |f(t)|\, e^{-st}\, dt \int\limits_0^a |\varphi(t)|\, e^{-st}\, dt,$$

откуда видно, что если f и φ — оригиналы, то $f * \varphi$ — тоже оригинал, причем показатель роста $f * \varphi$ не более наибольшего из показателей роста f и φ.

Свертка оригиналов

Теорема. При свертывании оригиналов изображения перемножаются, т. е. если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ и $\varphi(t) \rightleftharpoons \Phi(p)$, то $(f * \varphi)(t) \rightleftharpoons F(p)\, \Phi(p)$.

Доказательство. Для простоты мы имеем в виду лишь непрерывные на $[0, +\infty]$ оригиналы. Учитывая формулу (5.5), достаточно показать, что

$$\int\limits_0^a f(u)\, e^{-pu}\, du \int\limits_{a-u}^a \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad a \to +\infty.$$

Пусть $|f(t)| \risingdotseq F_1(p)$ и $|\varphi(t)| \risingdotseq \Phi_1(p)$, тогда, если $\operatorname{Re} p = s$ больше показателей роста f и φ, то

$$\left| \int_0^a f(u)\, e^{-pu}\, du \int_{a-u}^{a} \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^a |f(u)|\, e^{-su}\, du \int_{a-u}^{a} |\varphi(t)|\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\frac{a}{2}} + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \leqslant$$

$$\leqslant F_1(s) \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} |\varphi(t)|\, e^{-st}\, dt + \Phi_1(s) \int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} |f(u)|\, e^{-su}\, du,$$

что $\to 0$ при $a \to +\infty$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти свертку t^α и t^β, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Имеем [делая в интеграле подстановку $u = tv$ и учитывая формулы (4.7) и (4.9)]:

$$t^\alpha * t^\beta = \int_0^t u^\alpha (t-u)^\beta\, du = t^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 v^\alpha (1-v)^\beta\, dv =$$

$$= B(\alpha+1, \beta+1)\, t^{\alpha+\beta+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\, t^{\alpha+\beta+1}$$

и, в частности, при целых неотрицательных m, n

$$t^m * t^n = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\, t^{m+n+1}.$$

Формула Дюамеля

Пусть $f(t)$ — непрерывный на $[0, +\infty)$ оригинал, $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемый на $[0, +\infty)$ оригинал. Из $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ следует:

$$\int_0^t f(u)\, \varphi(t-u)\, du \risingdotseq F(p)\, \Phi(p).$$

17 Зак. 1944. П. И. Романовский

Из правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметра, следует, что левая часть непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$, причем

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\,\varphi(t-u)\,du=\int_0^t f(u)\,\varphi'(t-u)\,du+f(t)\,\varphi(0).$$

Отсюда в силу свойства 4 § 3 получаем искомую формулу Дюамеля

$$f(t)\,\varphi(0)+\int_0^t f(u)\,\varphi'(t-u)\,du \risingdotseq pF(p)\,\Phi(p). \tag{5.6}$$

§ 5. ОРИГИНАЛЫ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ

Изображения некоторых элементарных функций

1. Изображения степенных и показательных функций. При $\alpha>-1$ степенная функция t^α является оригиналом с нулевым показателем роста, причем

$$L(t^\alpha)=\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}\,dt,$$

что при положительных значениях p равно (после замены pt на t)

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Но как изображение t^α, так и правая часть последнего равенства аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$, следовательно, совпадая в положительных точках, они (в силу теоремы единственности, см. гл. III, § 14) совпадают на всей полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$ (заметим, что степенные функции $p^\gamma=e^{\gamma \operatorname{Ln} p}$ комплексного переменного p многозначны при не целых γ, но, рассматривая их на полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$, мы всякий раз имеем в виду те их ветви, которые происходят от ветвей $\mathrm{Ln}\, p$, совпадающих для положительных p с $\ln p$). Итак,

$$t^{\alpha} \risingdotseq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > -1). \tag{5.7}$$

Так, при $\alpha = m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$t^{m} \risingdotseq \frac{m!}{p^{m+1}} \tag{5.8}$$

и, в частности, при $m = 0$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{5.9}$$

Из (5.8) по правилу смещения изображений (§ 3, свойство 11) находим при любом целом неотрицательном m и любом комплексном λ

$$t^{m}e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{m!}{(p-\lambda)^{m+1}} \tag{5.10}$$

и, в частности, при $m = 0$

$$e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}. \tag{5.11}$$

2. Изображения тригонометрических и гиперболических функций. Имеем в силу (5.11):

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}; \tag{5.12}$$

$$\sin t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1}; \tag{5.13}$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}; \tag{5.14}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}. \tag{5.15}$$

Из (5.12) и (5.13) по правилу подобия (§ 3, свойство 3) находим:

$$\cos \beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}; \qquad \sin \beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2},$$

откуда по правилу смещения изображений (§ 3, свойство 11)

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \fallingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}; \qquad e^{\alpha t}\sin\beta t \fallingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Необходимое и достаточное условие рациональности изображения

Теорема. Для того чтобы изображение было рациональной функцией, необходимо и достаточно, чтобы оригинал являлся линейной комбинацией функций вида $t^m e^{\lambda t}$ (m — целое неотрицательное, λ — комплексное).

Доказательство достаточности. Если оригинал есть линейная комбинация функций $t^m e^{\lambda t}$, то в силу (5.10) изображение будет линейной комбинацией функций $\frac{m!}{(p-\lambda)^{m+1}}$ и, следовательно, будет рациональной функцией.

Доказательство необходимости. Пусть изображение $F(p)$ рационально. Так как по теореме § 2 $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re} p\to+\infty$, то $F(p)$ будет правильной рациональной дробью. Пусть p_k — ее полюсы, n_k — их кратности. Тогда, разлагая $F(p)$ на простейшие элементы, получим:

$$F(p)=\sum_k\sum_{l=1}^{n_k}\frac{M_{kl}}{(p-p_k)^l};$$

где M_{kl} — некоторые комплексные числа. Но из (5.10) видно, что

$$\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{p_k t} \fallingdotseq \frac{1}{(p-p_k)^l}.$$

Отсюда

$$\sum_k\sum_{l=1}^{n_k}\frac{M_{kl}t^{l-1}}{(l-1)!}e^{p_k t} \fallingdotseq F(p),$$

а так как оригинал вполне определяется своим изображением, то

$$f(t)=\sum_k\sum_{l=1}^{n_k}\frac{M_{kl}\,t^{l-1}}{(l-1)!}e^{p_k t}$$

и, следовательно, является линейной комбинацией функций вида $t^m e^{\lambda t}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что всякая правильная рациональная дробь является изображением некоторого оригинала. Таким образом, с помощью преобразования Лапласа устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми функциями, являющимися линейными комбинациями выражений $t^m e^{\lambda t}$ и всеми правильными рациональными дробями.

Заметим, что класс функций, являющихся линейными комбинациями выражений вида $t^m e^{\lambda t}$, обладает следующими свойствами: операции линейного комбинирования, умножения на аргумент, умножения на показательную функцию, линейного преобразования аргумента, дифференцирования и интегрирования, примененные к функциям этого класса, приводят снова к функциям этого класса.

Нахождение оригинала по заданному изображению (когда оно рационально)

Предыдущие выкладки показывают, что если $F(p)$ — какая-нибудь правильная рациональная дробь, разложение которой на простейшие дроби есть

$$F(p) = \sum_k \sum_{l=1}^{n_k} \frac{M_{kl}}{(p-p_k)^l},$$

то

$$f(t) = \sum_k \sum_{l=1}^{n_k} \frac{M_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_k t} \tag{5.16}$$

будет оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

В частности, если все полюсы $F(p)$ — простые, то

$$F(p) = \sum_k \frac{M_k}{p-p_k}; \qquad M_k = \operatorname*{Res}_{p_k} F(p),$$

и для оригинала, имеющего изображение $F(p)$, получим формулу

$$f(t) = \sum_k M_k e^{p_k t}. \tag{5.17}$$

Таким образом, нахождение оригинала по заданному изображению (когда оно рационально) сводится к разложению правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

18 Зак. 1944. П. И. Романовский

Пример. Найти оригинал $f(t)$, имеющий изображение

$$F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$$

Разложение на простейшие дроби даст:

$$F(p)=\frac{1}{p^3}-\frac{i}{p+1-i}+\frac{i}{p+1+i};$$

следовательно,

$$f(t)=\frac{t^2}{2}-ie^{(-1+i)t}+ie^{(-1-i)t}=\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t.$$

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Из общего курса математического анализа известно, что все решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правая часть которых есть линейная комбинация функций вида $t^m e^{\lambda t}$, являются функциями такого же вида. То же относится и к системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых являются линейными комбинациями функций вида $t^m e^{\lambda t}$. Но линейные комбинации выражений $t^m e^{\lambda t}$, если их рассматривать на $[0, +\infty)$, являются оригиналами с рациональными изображениями. Это подсказывает нижеследующий прием отыскания решения названных линейных уравнений и систем линейных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям Коши.

Линейные дифференциальные уравнения

Требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0)=c_0;\quad y'(0)=c_1;\ \ldots;\ y^{(n-1)}(0)=c_{n-1},$$

когда $f(t)$ есть линейная комбинация функций вида $t^m e^{\lambda t}$.

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда из рассматриваемого дифференциального уравнения и начальных условий Коши следует (в силу свойств 1, 2, 5 § 3):

$$a_0(p^nY - c_0p^{n-1} - \ldots - c_{n-1}) + a_1(p^{n-1}Y - c_0p^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - c_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(pY - c_0) + a_nY = F$$

или

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)Y =$$
$$= c_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ c_1(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + c_{n-1}a_0 + F,$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{a_0p^n + \ldots + a_n}[c_0(a_0p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ c_1(a_0p^{n-2} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + c_{n-1}a_0 + F(p)]. \quad (5.18)$$

Итак, изображение $Y(p)$ искомого решения $y(t)$ находится по формуле (5.18). Разлагая правильную рациональную дробь $Y(p)$ на простейшие элементы, найдем с помощью формулы (5.16) искомое решение $y(t)$. В случае однородного уравнения имеем $f(t) = 0$ и, следовательно, $F(p) = 0$.

Таким образом, решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью, являющейся линейной комбинацией функций вида $t^m e^{\lambda t}$, сводится к разложению некоторой правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Пример 1. Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 15$; $y'(0) = 2$; $y''(0) = 56$.

Здесь

$$Y(p) = \frac{15(p^2 - p - 6) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$
$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3};$$

следовательно,

$$y(t) = 6 + 5e^{-2t} + 4e^{3t}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + y = \text{const}$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

Здесь

$$Y(p)=\frac{\frac{p}{p^2+1}}{p^2+1}=\frac{p}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{(p-i)^2}-\frac{1}{(p+i)^2}\right];$$

следовательно,

$$y(t)=\frac{1}{4i}(te^{it}-te^{-it})=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Системы линейных дифференциальных уравнений

Требуется найти решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{array}{l} y_1'+a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n=f_1(t),\\ y_2'+a_{21}y_1+\ldots+a_{2n}y_n=f_2(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n'+a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n=f_n(t), \end{array}\right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y_1(0)=c_1;\quad y_2(0)=c_2;\quad \ldots;\quad y_n(0)=c_n,$$

когда $f_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ являются линейными комбинациями функций вида $t^m e^{\lambda t}$.

Пусть $y_k(t) \risingdotseq Y_k(p)$, $f_k(t) \risingdotseq F_k(p)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, тогда из рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и начальных условий Коши следует (в силу свойств 1, 2, 4 § 3):

$$\left.\begin{array}{l} pY_1-c_1+a_{11}Y_1+\ldots+a_{1n}Y_n=F_1,\\ pY_2-c_2+a_{21}Y_1+\ldots+a_{2n}Y_n=F_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ pY_n-c_n+a_{n1}Y_1+\ldots+a_{nn}Y_n=F_n, \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+p)Y_1+a_{12}Y_2+\ldots+a_{1n}Y_n=c_1+F_1,\\ a_{21}Y_1+(a_{22}+p)Y_2+\ldots+a_{2n}Y_n=c_2+F_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}Y_1+a_{n2}Y_2+\ldots+(a_{nn}+p)Y_n=c_n+F_n. \end{array}\right\}$$

Пусть

$$A(p)=\begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+p \end{vmatrix}$$

и $A_{jk}(p)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента j-й строки и k-го столбца матрицы этого определителя. Тогда с помощью правила Крамера находим:

$$Y_k(p)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}[c_j+F_j(p)]\,A_{jk}(p)}{A(p)} \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \quad (5.19)$$

Итак, изображения $Y_k(p)$ функций $y_k(t)$, составляющих искомое решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, находятся по формуле (5.19). Разлагая правильные рациональные дроби $Y_k(p)$ на простейшие дроби, найдем с помощью формул (5.16) искомые функции $y_k(t)$. В случае однородной системы все $f_k(t)=0$ и, следовательно, все $F_k(p)=0$.

Таким образом, решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правыми частями, являющимися линейными комбинациями выражений вида $t^m e^{\lambda t}$, сводится к разложению нескольких правильных рациональных дробей на простейшие дроби.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} y'+4y+4z&=0, \\ z'+2y+6z&=0 \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $y(0)=3;\ z(0)=15$.

Здесь

$$Y(p)=\frac{3(p+6)+15(-4)}{p^2+10p+16}=\frac{3p-42}{(p+2)(p+8)}=-\frac{8}{p+2}+\frac{11}{p+8},$$

$$Z(p)=\frac{3(-2)+15(p+4)}{p^2+10p+16}=\frac{15p+54}{(p+2)(p+8)}=\frac{4}{p+2}+\frac{11}{p+8};$$

следовательно,

$$y(t)=-8e^{-2t}+11e^{-8t},$$

$$z(t)=4e^{-2t}+11e^{-8t}.$$

§ 7. ОРИГИНАЛЫ С ИЗОБРАЖЕНИЯМИ, РЕГУЛЯРНЫМИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

О предельном переходе под знаком несобственного интеграла

Теорема. Пусть $f_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — комплекснозначные непрерывные функции на $[0, +\infty)$, причем $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — такая действительная неотрицательная непрерывная функция на $[0, +\infty)$, что $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ сходится. Пусть затем $f_n(t) \to f(t)$ на $[0, +\infty)$, и притом равномерно на каждом сегменте $[0, a]$, где $a > 0$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \to \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из условий теоремы видно, что $f(t)$ непрерывна и $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$ на $[0, +\infty)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ сходится, то найдется такое $a > 0$, что $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как $f_n(t) \to f(t)$ на $[0, a]$ равномерно, то $\int\limits_0^a f_n(t)\,dt \to \int\limits_0^a f(t)\,dt$ и, следовательно, найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь:

$$\left| \int\limits_0^a f_n(t)\,dt - \int\limits_0^a f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, при $n > N$

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^a f_n(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt\right| +$$
$$+\left|\int_a^{+\infty} f_n(t)\,dt\right| + \left|\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Теорема остается в силе, если $f_n(t)$ и $\varphi(t)$ предполагать непрерывными на $[0, +\infty)$, за исключением изолированных точек, и требовать равномерной сходимости $f_n(t)$ к $f(t)$ лишь на каждом сегменте, лежащем на $[0, +\infty)$ и не содержащем упомянутых изолированных точек.

Для этого в предыдущее доказательство нужно внести следующие изменения. Выберем a настолько большим и окружим попадающие на $[0, a]$ точки разрыва настолько малыми сегментами, чтобы сумма интегралов от $\varphi(t)$ по этим сегментам и по $[a, +\infty)$ была меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. После этого используем тот факт, что на оставшихся сегментах $f_n(t) \to f(t)$ равномерно.

В качестве приложения доказанной теоремы сделаем два замечания о свойствах изображений (когда оригинал удовлетворяет некоторым требованиям).

Замечание 1. Пусть $f(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$, $f(+0)$ существует, $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — неотрицательный непрерывный неубывающий на $(0, +\infty)$ оригинал. Тогда, если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $pF(p) \to f(+0)$, если $p > 0$ и $p \to +\infty$.

В самом деле, пусть s — положительное число, большее показателя роста $\varphi(t)$, и пусть $p > s$. Тогда

$$pF(p) = p\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{p}\right)e^{-t}\,dt;$$

$$\left|f\left(\frac{t}{p}\right)e^{-t}\right| \leqslant \varphi\left(\frac{t}{p}\right)e^{-t} \leqslant \varphi\left(\frac{t}{s}\right)e^{-t};$$

интеграл

$$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) e^{-t}\, dt = s \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-st}\, dt$$

сходится; $f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t} \to f(+0)\, e^{-t}$ при $p \to +\infty$ равномерно на каждом сегменте $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Следовательно, в силу доказанной теоремы

$$pF(p) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t}\, dt \to \int_0^{+\infty} f(+0)\, e^{-t}\, dt = f(+0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Пусть $f(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$, $f(+\infty)$ существует, $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — неотрицательный, непрерывный, невозрастающий на $(0, +\infty)$ оригинал. Тогда, если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $pF(p) \to f(+\infty)$, если $p > 0$ и $p \to 0$.

Сперва заметим, что показатель роста $\varphi(t)$, и подавно показатель роста $f(t)$, не более нуля и потому $F(p)$ имеет смысл при всех $p > 0$. Пусть $0 < p < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$pF(p) = p \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t}\, dt;$$

$$\left| f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t} \right| \leqslant \varphi\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t} \leqslant \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) e^{-t};$$

$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) e^{-t}\, dt = \varepsilon \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-\varepsilon t}\, dt$ сходится; $f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t} \longrightarrow$ $\longrightarrow f(+\infty)\, e^{-t}$ при $p \to 0$ равномерно на каждом сегменте $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Следовательно, в силу доказанной теоремы

$$pF(p) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{p}\right) e^{-t}\, dt \to \int_0^{+\infty} f(+\infty)\, e^{-t}\, dt = f(+\infty),$$

что и требовалось доказать.

Целые функции экспоненциального типа

Определение. Целая функция $f(z)$ комплексного переменного z называется *целой функцией экспоненциального типа*, если можно найти такие положительные числа C, σ, что для всех комплексных значений z выполняется неравенство

$$|f(z)| < Ce^{\sigma|z|}.$$

Лемма. Для того чтобы степенной ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} A_k z^k$ изображал целую функцию экспоненциального типа, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых положительных чисел C, S выполнялись неравенства

$$|A_k| < C\frac{S^k}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказательство необходимости. Пусть $f(z) = \sum\limits_{0}^{+\infty} A_k z^k$ — целая функция экспоненциального типа. Тогда $|f(z)| < Ce^{\sigma|z|}$ при всех z, где C и σ — некоторые положительные числа. В силу неравенства (3.48) для модулей коэффициентов ряда Тейлора (гл. III, § 14) находим при всех $R > 0$

$$|A_k| < \frac{Ce^{\sigma R}}{R^k} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Беря $R = \frac{k}{\sigma}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, получим:

$$|A_k| < \frac{Ce^k\sigma^k}{k^k} \leqslant \frac{C(e\sigma)^k}{k!} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

поэтому, полагая $S = e\sigma$, будем иметь:

$$|A_k| < C\frac{S^k}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказательство достаточности. Пусть $|A_k| < C\frac{S^k}{k!}$, где C и S — некоторые положительные числа. Тогда, очевидно, степенной ряд $\sum A_k z^k$ сходится для всех z и изображает целую функцию $f(z)$, причем для всех z имеем:

$$|f(z)| \leqslant \sum_{0}^{+\infty} |A_k||z|^k < \sum_{0}^{+\infty} C \frac{(S|z|)^k}{k!} = Ce^{S|z|},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что операции линейного комбинирования, умножения на независимое переменное, умножения на показательную функцию, линейного преобразования независимого переменного, дифференцирования и интегрирования, примененные к целым функциям экспоненциального типа, приводят снова к целым функциям экспоненциального типа.

Необходимое и достаточное условие регулярности изображения в бесконечности

Теорема. Для того чтобы изображение было регулярным в бесконечно удаленной точке, необходимо и достаточно, чтобы оригинал являлся целой функцией экспоненциального типа.

Доказательство достаточности. Пусть оригинал $f(t)$ есть целая функция экспоненциального типа [точнее, $f(t)$, заданная на $[0, +\infty)$, продолжаема до целой функции экспоненциального типа]. Тогда, в частности, при $t \geqslant 0$ будем иметь:

$$f(t) = \sum_{0}^{+\infty} A_k t^k; \quad |A_k| < C\frac{S^k}{k!} \; (C > 0;\; S > 0).$$

Очевидно, при $t \geqslant 0$, $\operatorname{Re} p = s > S$ имеем:

$$\left|\sum_{0}^{n} A_k t^k \cdot e^{-pt}\right| \leqslant \sum_{0}^{+\infty} |A_k|\, t^k \cdot e^{-st} < \sum_{0}^{+\infty} C\frac{S^k t^k}{k!} \cdot e^{-st} = Ce^{-(s-S)t};$$

интеграл $\int\limits_0^{+\infty} Ce^{-(s-S)t}\,dt = \frac{C}{s-S}$ сходится; $\sum\limits_{0}^{n} A_k t^k \cdot e^{-pt} \to$ $\to f(t)\,e^{-pt}$ равномерно на каждом $[0, a]$, где $a > 0$. Следовательно, на основании теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \sum_0^n A_k t^k \cdot e^{-pt}\, dt \to \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

или

$$L\left[\sum_0^n A_k t^k\right] \to L[f(t)] \quad \text{при } \operatorname{Re} p > S,$$

но

$$L\left[\sum_0^n A_k t^k\right] = \sum_0^n A_k L(t^k) = \sum_0^n \frac{k!\, A_k}{p^{k+1}};$$

следовательно,

$$L[f(t)] = \sum_0^{+\infty} \frac{k!\, A_k}{p^{k+1}} \quad \text{при } \operatorname{Re} p > S,$$

причем ряд в правой части сходится при $|p| > S$ и изображает аналитическую функцию в окрестности бесконечно удаленной точки. Это доказывает, что изображение $F(p)$ после аналитического продолжения на окрестность бесконечно удаленной точки становится регулярным в ней и

$$F(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!\, A_k}{p^{k+1}} \quad \text{при } |p| > S.$$

Таким образом, если $f(t)$ — целая функция экспоненциального типа и если ее разложение в ряд Тейлора есть $\sum\limits_0^{\infty} A_k t^k$, то изображение $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, A_k}{p^{k+1}}. \tag{5.20}$$

Доказательство необходимости. Пусть изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ после аналитического продолжения оказалось регулярным в бесконечно удаленной точке. Лорановское разложение $F(p)$ в окрестности ∞ [учитывается, что $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$] имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_k}{p^k}.$$

Пусть положительное число S лежит в области сходимости этого ряда. Тогда ряд $\sum \frac{B_k}{S^k}$ сходится; следовательно, сходится и ряд $\sum \frac{B_{k+1}}{S^k}$ $\left(\text{ибо } \frac{B_{k+1}}{S^k} = S\frac{B_{k+1}}{S^{k+1}}\right)$ поэтому его члены ограничены, т. е. $\left|\frac{B_{k+1}}{S^k}\right| < C$, где C — некоторое положительное число, откуда $\left|\frac{B_{k+1}}{k!}\right| < C\frac{S^k}{k!}$; следовательно, $\sum_0^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} t^k$ — целая функция экспоненциального типа. По доказанному

$$\sum_0^{+\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} t^k \risingdotseq \sum_0^{+\infty} \frac{B_{k+1}}{p^{k+1}} = \sum_1^{+\infty} \frac{B_k}{p^k} = F(p);$$

отсюда (так как оригинал вполне определяется своим изображением) заключаем, что

$$f(t) = \sum_0^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} t^k,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что всякая регулярная в бесконечности аналитическая функция, равная нулю в бесконечности, является изображением некоторой целой функции экспоненциального типа.

Таким образом, с помощью преобразования Лапласа устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми целыми функциями экспоненциального типа и всеми аналитическими функциями, регулярными в бесконечно удаленной точке и равными в ней нулю.

Нахождение оригинала по его изображению (когда оно регулярно в бесконечности)

Предыдущие выкладки показывают, что если $F(p)$ — какая-нибудь аналитическая функция, регулярная в бесконечно удаленной точке и равная в ней нулю, и если ее лорановское разложение в окрестности ∞ есть

$$F(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{B_k}{p^k},$$

то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{B_k}{(k-1)!}t^{k-1} \tag{5.21}$$

будет оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Изображения бесселевых функций

При $\nu\geqslant 0$ [см. гл. IV, § 2, формулу (4.20)] функция

$$\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

будет целой функцией экспоненциального типа.

В самом деле, модуль коэффициента при t^{2k} в правой части равен

$$\frac{1}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{1}{2^{2k}k!\,(\nu+k)(\nu+k-1)\ldots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{1}{2^{2k}(k!)^2};$$

но $2^{2k}(k!)^2\geqslant(2k)!$ [Это неравенство проверяется методом индукции: при $k=0$ оно верно; если оно верно для некоторого k, то переход к $k+1$ сводится к умножению левой и правой частей соответственно на $4(k+1)^2$ и $(2k+1)\times\times(2k+2)$, но $4(k+1)^2>(2k+1)(2k+2)$, следовательно, неравенство будет верно и для $k+1$.] Таким образом, при всех комплексных t

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\right|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^{2k}}{(2k)!}\leqslant\frac{e^{|t|}}{\Gamma(\nu+1)}$$

и, следовательно, $\dfrac{J_\nu(t)}{t^\nu}$ — целая функция экспоненциального типа.

В силу (5.20)

$$\frac{J_\nu(t)}{t^\nu} \risingdotseq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!\, \Gamma(\nu+k+1)\, p^{2k+1}}, \tag{5.22}$$

где ν — любое действительное неотрицательное число.

При $\nu = 0$ отсюда находим:

$$J_0(t) \risingdotseq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 p^{2k+1}},$$

но биномиальное разложение показывает, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = \left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 p^{2k}};$$

следовательно,

$$J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{5.23}$$

Покажем методом индукции, что

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.24}$$

При $n = 0$ это следует из (5.23). Далее, в силу свойства 4 § 3

$$J_1(t) = -J_0'(t) \risingdotseq -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$$

и, следовательно, при $n = 1$ доказываемая формула также верна. Пусть теперь эта формула верна для всех неотрицательных целых индексов, меньших n (где $n \geqslant 2$); тогда [см. гл. IV, § 3, формулу (4.27)], учитывая, что $J_{n-1}(0)=0$, находим:

$$J_n(t)=J_{n-2}(t)-2J'_{n-1}(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}}-\\ -\frac{2p(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким образом, формула (5.24) доказана.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эта функция регулярна в бесконечно удаленной точке и $F(\infty)=0$, следовательно, она является изображением некоторой целой функции экспоненциального типа $f(t)$.

Так как

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,p^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+k+1}},$$

то в силу (5.21)

$$f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}t^{n+k},$$

но [см. гл. IV, § 2, формулу (4.20′)]

$$J_n(2\sqrt{t})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k!\,(n+k)!},$$

следовательно,

$$f(t)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}).$$

Таким образом,

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{5.25}$$

и, в частности, при $n=0$

$$J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}. \tag{5.26}$$

§ 8. ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Изображения логарифма и интегрального логарифма

Очевидно, $\ln t$ есть оригинал с нулевым показателем роста. Пусть $\ln t \risingdotseq F(p)$; тогда (принимая во внимание свойства 6 и 4 § 3 и учитывая, что $t\ln t - t \to 0$ при $t \to 0$)

$$t\ln t \risingdotseq -F'(p);$$

$$t\ln t - t \risingdotseq -F'(p) - \frac{1}{p^2};$$

$$(t\ln t - t)' \risingdotseq -pF'(p) - \frac{1}{p};$$

но $(t\ln t - t)' = \ln t$, следовательно,

$$-pF'(p) - \frac{1}{p} = F(p),$$

$$pF'(p) + F(p) = -\frac{1}{p},$$

$$[pF(p)]' = -\frac{1}{p},$$

$$C + pF(p) = -\operatorname{Ln} p,$$

$$F(p) = -\frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{C}{p}.$$

Полагая $p = 1$, найдем:

$$C = -F(1) = -\int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t}\,dt = 0{,}577\ \ldots$$

Это число называется *постоянной Эйлера*. Можно показать, что

$$C = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Итак,

$$\ln t \risingdotseq -\frac{\ln p}{p} - \frac{C}{p}, \tag{5.27}$$

где C — постоянная Эйлера.

Рассмотрим теперь $\operatorname{li} e^t$ (см. гл. IV, § 7). Имеем:

$$\operatorname{li} e^t = \int \frac{e^t}{t}\,dt = \int \frac{e^t-1}{t}\,dt + \ln t = \int_0^t \frac{e^u-1}{u}\,du + c + \ln t,$$

где c — произвольная постоянная. Но (учитывая свойство 9 и 8 § 3)

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},$$

$$e^t - 1 \risingdotseq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p},$$

$$\frac{e^t-1}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}\right) dq = \operatorname{Ln} p - \operatorname{Ln}(p-1),$$

$$\int_0^t \frac{e^u-1}{u}\,du \risingdotseq \frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{\operatorname{Ln}(p-1)}{p}.$$

Следовательно, пользуясь (5.27), получим:

$$\operatorname{li} e^t \risingdotseq \frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{\operatorname{Ln}(p-1)}{p} + \frac{c}{p} - \frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{C}{p} = -\frac{\operatorname{Ln}(p-1)}{p} - \frac{C-c}{p},$$

и при надлежащей нормировке интегрального логарифма будем иметь:

$$\operatorname{li} e^t \risingdotseq -\frac{\operatorname{Ln}(p-1)}{p}. \tag{5.28}$$

2. Изображения функций, связанных с интегралом вероятностей

Положим:

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\,du; \quad \operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t).$$

Очевидно, $\operatorname{erf}(t)$ есть непрерывная возрастающая функция на $[0, +\infty)$; $\operatorname{erf}(0)=0$, $\operatorname{erf}(+\infty)=1$, $\operatorname{Erf}(t)$ есть непрерывная убывающая функция на $[0, +\infty)$, $\operatorname{Erf}(0)=1$, $\operatorname{Erf}(+\infty)=0$. Рассмотрим функцию $f(t)=e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$ (очевидно, это оригинал), и пусть $f(t) \risingdotseq F(t)$. Учитывая, что $[\operatorname{erf}(t)]' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$, найдем:

$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + e^t \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}};$$

следовательно, после перехода к изображению (пользуясь свойством 4 § 3 и учитывая, что $f(0)=0$), получим:

$$pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}} = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}},$$

откуда

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Таким образом,

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}, \tag{5.29}$$

откуда по правилу смещения изображения (свойство 11 § 3)

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}. \tag{5.30}$$

Затем

$$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) = e^t - e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = \frac{1}{p+\sqrt{p}}$$

и, таким образом,

$$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p+\sqrt{p}}, \tag{5.31}$$

откуда по правилу смещения изображений

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}, \tag{5.32}$$

3. Изображения интегрального синуса и интегрального косинуса

Имеем (на основании свойств 9 и 8 § 3):

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}; \qquad \frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p;$$

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right);$$

следовательно (при нормировке $\operatorname{si} 0 = 0$),

$$\operatorname{si} t \risingdotseq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}. \tag{5.33}$$

Далее (учитывая свойства 9 и 8 § 3),

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}; \qquad \cos t - 1 \risingdotseq \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p};$$

$$\frac{\cos t - 1}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{q}{q^2+1} - \frac{1}{q}\right) dq =$$

$$= \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{q^2+1}}{q}\Bigg|_p^\infty = \operatorname{Ln} \frac{p}{\sqrt{p^2+1}};$$

$$\int_0^t \frac{\cos u - 1}{u}\,du \risingdotseq \frac{1}{p} \operatorname{Ln} \frac{p}{\sqrt{p^2+1}};$$

$$\operatorname{ci} t = \int \frac{\cos t}{t}\,dt \doteq \int \frac{\cos t - 1}{t}\,dt + \ln t =$$

$$= \int_0^t \frac{\cos u - 1}{u}\,du + c + \ln t,$$

где c — произвольная постоянная; следовательно [принимая во внимание (5.27)],

$$\operatorname{ci} t \risingdotseq \frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{\operatorname{Ln}(p^2+1)}{2p} + \frac{c}{p} - \frac{\operatorname{Ln} p}{p} - \frac{C}{p} =$$

$$= -\frac{\operatorname{Ln}(p^2+1)}{2p} - \frac{C-c}{p},$$

поэтому при надлежащей нормировке интегрального косинуса будем иметь:

$$\operatorname{ci} t \risingdotseq -\frac{\operatorname{Ln}(p^2+1)}{2p}. \tag{5.34}$$

4. Изображения интегралов Френеля

Имеем (пользуясь свойствами 11 и 8 § 3):

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}};$$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right);$$

$$\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2ip}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right);$$

следовательно, полагая

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \quad \text{(синус Френеля)}, \tag{5.35}$$

получим:

$$S(t) \risingdotseq \frac{1}{2\sqrt{2i}} \frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{5.36}$$

Далее (учитывая свойства 11 и 8 § 3),

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}};$$

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right);$$

$$\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right);$$

следовательно, полагая

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du \quad \text{(косинус Френеля)}, \tag{5.37}$$

получим:

$$C(t) \risingdotseq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{p\sqrt{p^2+1}}. \tag{5.38}$$

§ 9. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

Преобразование Фурье и его обращение

Определение. Пусть $f(t)$ — комплекснозначная функция на $(-\infty, +\infty)$, непрерывная всюду, за исключением, быть может, изолированных точек, и абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$.

Преобразованием Фурье функции $f(t)$ называется функция

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt. \tag{5.39}$$

Преобразование Фурье функции $f(t)$ называют еще *спектральной характеристикой* функции $f(t)$. Легко видеть, что $F(u)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и

$$|F(u)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt.$$

Теорема обращения преобразования Фурье

Если $f(t)$ удовлетворяет упомянутым в предыдущем определении условиям, то в каждой точке t, в которой f дифференцируема, имеет место формула обращения (*обратное преобразование Фурье*)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{iut}\, dt, \tag{5.40}$$

где $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы (1.39), доказанной в § 10 главы I.

Преобразование Меллина и его обращение

Пусть $g(x)$ — комплекснозначная функция, непрерывная на $(0, +\infty)$ всюду, за исключением, быть может, изолированных точек. Если $\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} |g(x)| dx$ (здесь s — действительное число) сходится при $s = s_1$ и $s = s_2$, то он сходится при всяком s, лежащем между s_1 и s_2 (это следует из того, что если $s_1 < s < s_2$, то $x^s < x^{s_1}$ при $x < 1$, $x^s < x^{s_2}$ при $x > 1$). Отсюда легко заключить, что либо упомянутый интеграл при всех s расходится, либо найдутся такие a и b $(-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty)$, что при $a < s < b$ упомянутый интеграл сходится, а при $s < a$ и при $s > b$ расходится. В последнем случае (если $a < b$) *интеграл Меллина* $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} g(x) dx$ имеет полосу абсолютной сходимости $a < \operatorname{Re} p < b$, причем в каждой полосе $a_1 < \operatorname{Re} p \leqslant b_1$ (где $a < a_1 < b_1 < b$) его сходимость — равномерная. Из теоремы § 1 вытекает, что он изображает аналитическую функцию $G(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$ в полосе $a < \operatorname{Re} p < b$.

Определение. Пусть $g(x)$ — комплекснозначная функция на $(0, +\infty)$, непрерывная, за исключением, быть может, изолированных точек, и такая, что соответствующий интеграл Меллина имеет полосу абсолютной сходимости $a < \operatorname{Re} p < b$. *Преобразованием Меллина* функции $g(x)$ называется функция

$$G(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} g(x) dx, \tag{5.41}$$

аналитическая в полосе $a < \operatorname{Re} p < b$.

Замечание. Если преобразование Меллина функции $g(x)$ есть $G(p)$, то при $a < c < b$ преобразованием Фурье функции $e^{-ct} g(e^{-t})$ будет $G(c + iu)$.

В самом деле, с помощью подстановки $x = e^{-t}$ находим:

$$G(c+iu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c+iu)t} g(e^{-t})\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ct} g(e^{-t})\, e^{-iut}\,dt.$$

Теорема обращения преобразования Меллина

Если $g(x)$ удовлетворяет отмеченным в предыдущем определении условиям, то в каждой точке x, в которой g дифференцируема, имеет место формула обращения (*обратное преобразование Меллина*)

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(p)\,x^{-p}\,dp, \tag{5.42}$$

где $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_{c-ik}^{c+ik}$, причем c — любое действительное число, удовлетворяющее неравенствам $a < c < b$.

Доказательство. Если $g(x)$ дифференцируема в точке x, то после подстановки $x = e^{-t}$ функция $e^{-ct}g(e^{-t})$ будет дифференцируема в соответствующей точке t, но тогда в силу предыдущего замечания и теоремы обращения преобразования Фурье найдем в упомянутой точке t

$$e^{-ct} g(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(c+iu)\,e^{iut}\,du,$$

$$g(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(c+iu)\,e^{(c+iu)t}\,du;$$

следовательно, в рассматриваемой точке x

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(p)\,x^{-p}\,dp,$$

что и требовалось доказать.

Обращение преобразования Лапласа

Замечание. Если преобразование Лапласа функции $f(t)$ есть $F(p)$, т. е.

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt, \tag{5.43}$$

то преобразованием Фурье функции $e^{-at}f(t)$ будет $F(a+iu)$, если a — действительное число, большее показателя роста $f(t)$.

В самом деле,

$$F(a+iu)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\,e^{-(a+iu)\,t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}f(t)\cdot e^{-iut}\,dt.$$

Теорема обращения преобразования Лапласа

Если $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — его изображение, то в каждой точке t, в которой f дифференцируема, имеет место формула обращения (*обратное преобразование Лапласа*)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp, \tag{5.44}$$

где $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}=\lim\limits_{k\to+\infty}\int\limits_{a-ik}^{a+ik}$, причем a — любое действительное число, большее показателя роста $f(t)$.

Доказательство. Если $f(t)$ дифференцируема в точке t, то $e^{-at}f(t)$ тоже; следовательно, в силу предыдущего замечания и теоремы обращения преобразования Фурье найдем в рассматриваемой точке t

$$e^{-at}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a+iu)\,e^{iut}\,du,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a+iu)\,e^{(a+iu)t}\,du,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp,$$

что и требовалось доказать.

§ 10. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ БЫЛА ИЗОБРАЖЕНИЕМ

Теорема. Пусть $F(p)$ — аналитическая функция в полосе $\operatorname{Re} p > s_0$ и при всяком $a > s$:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(a+i\sigma)|\,d\sigma$ сходится,

2) $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re} p \geqslant a$, $|p|\to+\infty$.

Тогда $F(p)$ является изображением, причем оригиналом будет:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp,$$

где a — какое-нибудь действительное число, большее s_0.

Доказательство. Сперва заметим, что определение $f(t)$ не зависит от выбора числа a.

Действительно, интеграл от $F(p)\,e^{pt}$ по прямоугольнику, ограниченному прямыми $s=a$, $s=a_1$, $\sigma=\pm b$, где a и a_1 больше s_0, равен нулю по теореме Коши, но интегралы по горизонтальным сторонам стремятся к нулю в силу условия 2) при $b\to+\infty$. Следовательно, в пределе найдем, что

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \int\limits_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty}.$$

Из выражения для $f(t)$ находим:

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(a+i\sigma)|\,d\sigma\cdot e^{at}$$

при всяком $a > s_0$; следовательно, $f(t)$ есть оригинал с показателем роста $\leqslant s_0$. Пусть $\operatorname{Re} p_0 > s_0$ и $s_0 < a < \operatorname{Re} p_0$. Имеем:

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-p_0 t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{(a-p_0)t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+i\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+i\sigma) d\sigma \int_0^{+\infty} e^{(a+i\sigma-p_0)t} dt,$$

причем изменение порядка интегрирования законно, так как при $-\infty < \sigma < +\infty$, $0 \leqslant t < +\infty$ имеем:

$$|F(a+i\sigma) e^{(a+i\sigma-p_0)t}| = |F(a+i\sigma)| e^{-(\operatorname{Re} p_0 - a)t},$$

а интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(a+i\sigma)| d\sigma$ и $\int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p_0 - a)t} dt$ сходятся. Но

$$\int_0^{+\infty} e^{(a+i\sigma-p_0)t} dt = \frac{1}{p_0 - a - i\sigma},$$

следовательно,

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-p_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(a+i\sigma)}{p_0 - a - i\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp.$$

Пусть $R > |p_0|$ и C_R — дуга окружности $|p| = R$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a$, $a \pm ib$ — точки пересечения окружности $|p| = R$ с прямой $\operatorname{Re} p = a$ (рис. 67).

Внутри сегмента, ограниченного дугой C_R и прямой $\operatorname{Re} p=a$, аналитическая функция $\dfrac{F(p)}{p-p_0}$ имеет только одну особую точку p_0 (простой полюс); следовательно, по теореме о вычетах и правилу вычисления вычетов относительно простого полюса (см. гл. III, § 17) находим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{F(p)}{p-p_0}\,dp=\operatorname*{Res}_{p_0}\frac{F(p)}{p-p_0}=F(p_0),$$

где C — контур сегмента. Левая часть равна сумме интеграла вдоль хорды и интеграла вдоль дуги окружности.

Первое слагаемое равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a+ib}^{a-ib}\frac{F(p)\,dp}{p-p_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib}\frac{F(p)\,dp}{p_0-p}$$

и при $R\to+\infty$ будет стремиться к

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(p)\,dp}{p_0-p}=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\,e^{-p_0t}\,dt.$$

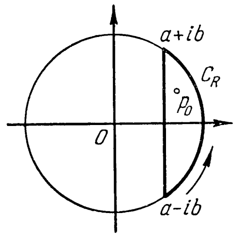


Рис. 67.

Покажем, что второе слагаемое $\int\limits_{C_R}\dfrac{F(p)\,dp}{p-p_0}$ при $R\to+\infty$ будет стремиться к нулю. В самом деле, пусть $M(R)$—максимум модуля $F(p)$ на C_R, тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{F(p)\,dp}{p-p_0}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M(R)}{R-|p_0|}\,2\pi R=\frac{R}{R-|p_0|}\,M(R)\to 0$$

при $R\to+\infty$, ибо по условию теоремы $M(R)\to 0$.

Таким образом, равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{F(p)}{p-p_0}\,dp=F(p_0)$$

в пределе при $R\to+\infty$ дает $\int\limits_0^{\infty}f(t)\,e^{-p_0t}dt=F(p_0)$. Этим доказано, что при $\operatorname{Re} p > s_0$ имеем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ и, следовательно, $f(t) \risingdotseq F(p)$, что и требовалось доказать.

Лемма Жордана. Пусть C_n ($n = 1, 2, \ldots$) — бесконечная система окружностей с центром O и неограничено возрастающими радиусами, a — какое-нибудь действительное число, Γ_n — часть окружности C_n, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant a$ (рис. 68). Тогда, если $F(p)$ непрерывна

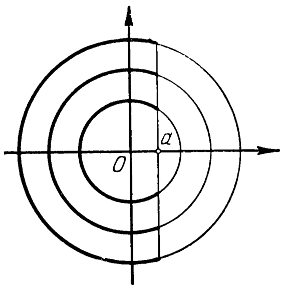


Рис. 68.

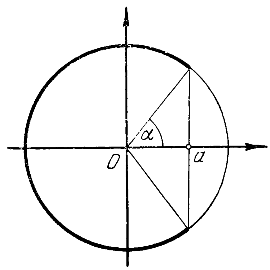


Рис. 69.

на совокупности дуг Γ_n и $F(p) \to 0$ при p на Γ_n, $p \to \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\Gamma_n} \Gamma(p)\, e^{pt}\, dp = 0$ при каждом $t > 0$.

Доказательство. Оценим модуль интеграла

$$\int\limits_{\Gamma(R,\, a)} F(p)\, e^{pt}\, dp,$$

где $\Gamma(R, a)$ — часть окружности радиуса $R > |a|$ с центром O, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant a$, и $F(p)$ — непрерывная функция на $\Gamma(R, a)$, если $t > 0$ и $|F(p)| \leqslant \varepsilon$ на $\Gamma(R, a)$. Имеем (рис. 69):

$$\left| \int\limits_{\Gamma(R,\, a)} F(p)\, e^{pt}\, dp \right| = \left| \int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} F(Re^{i\theta})\, e^{tRe^{i\theta}} Rie^{i\theta}\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon R \int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{tR\cos\theta}\, d\theta = \varepsilon R \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi-\alpha} e^{-tR\cos\varphi}\, d\varphi = 2\varepsilon R \int\limits_{0}^{\pi-\alpha} e^{-tR\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Пусть сперва $a > 0$. Тогда

$$\int_0^{\pi-\alpha} e^{-tR\cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR\sin\varphi}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} e^{tR\sin\varphi}\,d\varphi$$

(в первом и втором интегралах правой части φ заменено соответственно на $\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $\frac{\pi}{2}+\varphi\Big)$.

Но

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi, \quad \sin\varphi \leqslant \varphi \quad \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

следовательно,

$$\int_0^{\pi-\alpha} e^{-tR\cos\varphi}\,d\varphi < \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}tR\varphi}\,d\varphi + \int_{-\infty}^{\arcsin\frac{a}{R}} e^{tR\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2tR} + \frac{e^{tR\arcsin\frac{a}{R}}}{tR} < \frac{1}{tR}\left(\frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}at}\right),$$

учитывая, что $R\arcsin\frac{a}{R} = a\,\dfrac{\arcsin\frac{a}{R}}{\frac{a}{R}} \leqslant \frac{\pi}{2}a$.

Таким образом, при $a > 0$

$$\left|\int_{\Gamma(R,\,a)} F(p)\,e^{pt}\,dp\right| < \frac{\varepsilon}{t}\left(\pi + 2e^{\frac{\pi}{2}at}\right).$$

Если $a \leqslant 0$, то $\int_0^{\pi-\alpha} e^{-tR\cos\varphi}\,d\varphi \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}$, и тогда

$$\left|\int_{\Gamma(R,\,a)} F(p)\,e^{pt}\,dp\right| < \frac{\varepsilon}{t}\pi.$$

Итак, во всех случаях, если $|F(p)| < \varepsilon$ на $\Gamma(R, a)$, то

$$\left| \int\limits_{\Gamma(R, a)} F(p) e^{pt} dt \right| < \varepsilon\lambda(t, a), \tag{5.45}$$

где

$$\lambda(t, a) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left(\pi + 2e^{\frac{\pi}{2}at}\right) & \text{при } a > 0, \\ \frac{\pi}{t} & \text{при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказываемая лемма непосредственно вытекает из неравенства (5.45), ибо если M_n есть максимум $|F(p)|$ на Γ_n, то в силу (5.45)

$$\left| \int\limits_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dt \right| < M_n \lambda(t, a),$$

но $M_n \to 0$, следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dt \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $F(p)$ — мероморфная функция на всей плоскости комплексного переменного p, обладающая свойствами:

1) при $\operatorname{Re} p > s_0$ она удовлетворяет условиям теоремы данного параграфа;

2) существует система окружностей C_n с неограниченно возрастающими радиусами, не проходящих через полюсы и таких, что $F(p) \to 0$ при p на C_n, $p \to \infty$.

Тогда $F(p)$ является изображением, причем оригиналом будет:

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\nu_n} \operatorname{Res}_{p_k} [F(p) e^{pt}] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n} \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}] \; (t > 0). \tag{5.46}$$

где $p_1, p_2, \ldots,$ — полюсы $F(p)$, расположенные в порядке неубывания модулей, ν_n — число полюсов, лежащих внутри C_n, $\nu_0 = 0$. В частности, когда все полюсы простые, имеем:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu_n} e^{p_k t} \operatorname*{Res}_{p_k} F(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n} e^{p_k t} \operatorname*{Res}_{p_k} F(p) \quad (t > 0). \tag{5.47}$$

Доказательство. В силу теоремы, доказанной в настоящем параграфе, $F(p)$ является изображением, причем оригиналом будет:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp \quad (t > 0),$$

где a — какое-нибудь число, большее s_0. Пусть Γ_n — часть окружности C_n, пробегающая в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant a$, и пусть $a \pm ib_n$ — концы Γ_n. По теореме о вычетах (гл. III, § 17)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib_n}^{a+ib_n} F(p)\, e^{pt}\, dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} F(p)\, e^{pt}\, dp = \\ = \sum_{k=1}^{\nu_n} \operatorname*{Res}_{p_k} [F(p)\, e^{pt}].$$

Если $t > 0$, то при $n \to \infty$ первое слагаемое левой части стремится к $f(t)$, а второе слагаемое в силу леммы Жордана стремится к нулю, следовательно, в пределе получим искомую формулу (5.46).

Если полюс p_k — простой, то

$$\operatorname*{Res}_{p_k} [F(p)\, e^{pt}] = e^{p_k t} \operatorname*{Res}_{p_k} F(p),$$

поэтому в случае, когда все полюсы p_k — простые, формула (5.46) переходит в формулу (5.47), что и требовалось доказать.

Романовский Павел Игнатьевич

Ряды Фурье. Теория поля.
Аналитические и специальные функции.
Преобразование Лапласа.

Редактор *В. А. Солодков*

Технический редактор *С. Н. Ахламов*
Корректор *С. Н. Емельянова*

*

Сдано в набор 11/III 1957 г.
Подписано к печати 4/IX 1957 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.

Физ. печ. л. 9,13. Условн. печ. л. 14,97.
Уч.-изд. л. 14,80. Т-08356.
Тираж 12 000 экз.
Цена книги 5 руб. 45 коп. Заказ № 1944.

*

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

*

Министерство культуры СССР.
Главное управление
полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 5 р. 45 к.